Programación I

Matemática

Unidad 1: **TEORÍA DE CONJUNTOS, LÓGICA y RELACIONES.**

Clase 2: Teoría de Conjuntos

Objetivos

Desarrollar las Técnicas de conteo, de manera concreta y simbólica en el contexto de la resolución de problemas.

Bloques Temáticos

Problemas de Conteo.
Utilización de Propiedades.
Operaciones entre Conjuntos.

Matemática 1

Universidad Tecnológica Nacional

Clase 2

§ 1. Resolución de problemas con conjuntos

1.1. Cuando nos enfrentamos a la resolución de problemas mediante el uso de la Teoría de Conjuntos, no existe un procedimiento único para abordarlos. Sin embargo, podemos seguir algunas recomendaciones que nos ayudarán a encaminarnos hacia la solución adecuada.

a) Es fundamental comenzar por identificar los posibles conjuntos presentes en el problema y definir claramente cuál es el «Universo» dentro del cual se desarrolla el problema.

b) Una vez que hemos definido los conjuntos involucrados, es importante buscar indicios en el problema que nos señalen las posibles relaciones entre ellos. Estas relaciones pueden incluir uniones, intersecciones, complementos o diferencias entre conjuntos.

c) En algunos casos, el problema puede proporcionar información suficiente para crear un Diagrama de Venn que represente gráficamente las relaciones entre los conjuntos.

d) Es importante conocer cuál es la cardinalidad de un conjunto, recordando que la cardinalidad de un conjunto se refiere a la cantidad de elementos que existen en él.

Veamos algunos ejemplos:

1.2. Ejemplo. En una universidad hay 50 profesores. De ellos, 30 enseñan física, 18 enseñan química y 8 enseñan ambos cursos. Los demás enseñan otras materias. ¿Cuántos profesores enseñan sólo física?

Solución.— Sea F el conjunto de profesores que enseñan física y Q el conjunto de profesores que enseñan química. En este caso, el conjunto de referencia $\mathscr{U}$ es el total de profesores.

Tenemos que el total de profesores es: 50, los profesores que enseñan física son 30, los que enseñan química son 18 y los que enseñan ambos cursos son 8; es decir, $|F| = 30$ (cantidad de profesores que enseñan física), $|Q| = 18$ (cantidad de profesores que enseñan química), $|F \cap Q| = 8$ (cantidad de profesores que enseñan ambos cursos). $\square$

Para calcular los profesores que enseñan únicamente física, tenemos que encontrar $|F - Q|$. Ahora bien, vale que

$$|F - Q| = |F| - |F \cap Q|$$

y las dos cantidades del lado derecho de esta igualdad son conocidos, $|F| = 30$ y $|F \cap Q| = 8$.

Sustituyendo los valores:

$$|F - Q| = 30 - 8 = 22$$

Por lo tanto, 22 profesores enseñan sólo física.

Aunque no lo pide el ejercicio, de manera similar podemos calcular cuántos profesores enseñan únicamente química ($|Q - F|$):

$$|Q - F| = |Q| - |F \cap Q| = 18 - 8 = 10$$

Los profesores que enseñan otros cursos ($|Otros|$) se calculan restando los que están en $F \cup Q$ del total:

$$|F \cup Q| = |F| + |Q| - |F \cap Q| = 30 + 18 - 8 = 40$$

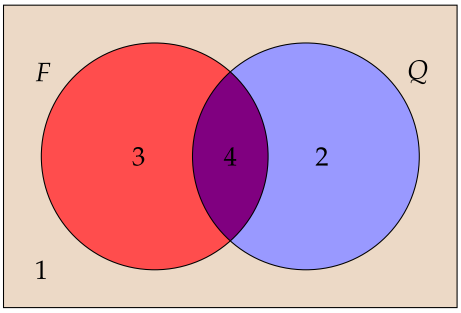
Entonces:

$$|Otros| = 50 - |F \cup Q| = 50 - 40 = 10$$

Por lo tanto, tenemos que:

- Profesores que enseñan sólo física=22.
- Profesores que enseñan sólo química=10.
- Profesores que enseñan ambos cursos=8.
- Profesores que enseñan otras materias= 10

En términos de diagramas de Venn:



Las distintas regiones del diagrama se corresponden con las cantidades de profesores que fuimos encontrando. Más precisamente,

1	Profesores que no enseñan ni física ni química.	$\mathscr{U} \setminus (F \cup Q)$
2	Profesores que enseñan solamente química.	$Q \setminus F$
3	Profesores que enseñan solamente física.	$F \setminus Q$
4	Profesores que enseñan física y química.	$F \cap Q$

1.3. Ejemplo. Una encuesta sobre 450 alumnos inscritos en una o más asignaturas de informática, estadística y álgebra durante un semestre, reveló los siguientes números de estudiantes en los cursos indicados:

- Informática: 280 estudiantes.
- Estadística: 190 estudiantes.
- Álgebra: 240 estudiantes.
- Informática y estadística: 70 estudiantes.
- Informática y álgebra: 120 estudiantes.
- Estadística y álgebra: 80 estudiantes.

Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos alumnos están inscritos en los tres cursos?

b) ¿Cuántos alumnos están inscritos en informática pero no en álgebra?

c) ¿Cuántos alumnos están inscritos en álgebra pero no en estadística?

d) ¿Cuántos alumnos están inscritos en informática o álgebra, pero no en estadística?

e) ¿Cuántos alumnos están inscritos en informática y álgebra, pero no en estadística?

f) ¿Cuántos alumnos están inscritos en informática pero no en álgebra ni estadística?

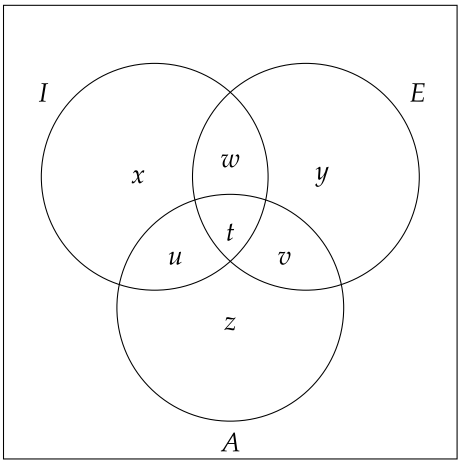
Solución.— Definamos los siguientes conjuntos:

- I: Alumnos inscritos en informática.
- E: Alumnos inscritos en estadística.
- A: Alumnos inscritos en álgebra.

Para resolver este problema asignaremos variables a las distintas intersecciones de conjuntos y plantearemos ecuaciones a partir de los datos del problema.

- x: Alumnos inscritos solo en informática .
- y: Alumnos inscritos solo en estadística.
- z: Alumnos inscritos solo en álgebra.
- w: Alumnos inscritos en informática y estadística, pero no álgebra.
- u: Alumnos inscritos en informática y álgebra, pero no estadística.
- v: Alumnos inscritos en estadística y álgebra, pero no informática.
- t: Alumnos inscritos en los tres cursos.

Un diagrama de Venn puede ser de ayuda para comprender la correspondencia entre estas variables y las intersecciones de conjuntos.



El total de alumnos es:

$$x + y + z + w + u + v + t = 450$$

Con los datos del problema, planteamos las siguientes ecuaciones:

1. $|I| = 280$:

$$x + w + u + t = 280$$

2. $|E| = 190$:

$$y + w + v + t = 190$$

3. $|A| = 240$:

$$z + u + v + t = 240$$

4. $|I \cap E| = 70$:

$$w + t = 70$$

5. $|I \cap A| = 120$:

$$u + t = 120$$

6. $|E \cap A| = 80$:

$$v + t = 80$$

De las ecuaciones de intersección, despejamos las variables u, v, w en términos de t:

- $w = 70 - t$.
- $u = 120 - t$.
- $v = 80 - t$.

Sustituimos en las ecuaciones $1, 2$ y 3:

a) $x + w + u + t = 280$:

$$x + (70 - t) + (120 - t) + t = 280$$

Simplificando:

$$x + 190 - t = 280 \implies x = 90 + t$$

b) $y + w + v + t = 190$:

$$y + (70 - t) + (80 - t) + t = 190$$

Simplificando:

$$y + 150 - t = 190 \implies y = 40 + t$$

c) $z + u + v + t = 240$:

$$z + (120 - t) + (80 - t) + t = 240$$

Simplificando:

$$z + 200 - t = 240 \implies z = 40 + t$$

Ahora usamos la ecuación correspondiente al total de alumnos: De $x + y + z + w + u + v + t = 450$, sustituimos las expresiones para x, y, z, w, u, v:

$$(90 + t) + (40 + t) + (40 + t) + (70 - t) + (120 - t) + (80 - t) + t = 450$$

Simplificando:

$$440 + t = 450 \implies t = 10$$

Estamos en condiciones de calcular todas las variables:

- $t = 10$
- $w = 70 - t = 70 - 10 = 60$
- $u = 120 - t = 120 - 10 = 110$
- $v = 80 - t = 80 - 10 = 70$
- $x = 90 + t = 90 + 10 = 100$
- $y = 40 + t = 40 + 10 = 50$
- $z = 40 + t = 40 + 10 = 50$

Finalmente, respondemos las preguntas del enunciado:

a) Alumnos en los tres cursos:

$$t = 10$$

Respuesta: 10 alumnos.

b) Informática pero no álgebra:

$$x + w = 100 + 60 = 160$$

Respuesta: 160 alumnos.

c) Álgebra pero no estadística:

$$z + u = 50 + 110 = 160$$

Respuesta: 160 alumnos.

d) Informática o álgebra, pero no estadística: Son los alumnos en $I \cup A$ que no están en E:

$$x + z + u + w = 100 + 50 + 110 + 60 = 320$$

Respuesta: 320 alumnos.

e) Informática y álgebra, pero no estadística:

$$u = 110$$

Respuesta: 110 alumnos.

f) Informática pero no álgebra ni estadística:

$$x = 100$$

Respuesta: 100 alumnos.

□

1.4. Ejercicios

1. En un colegio hay 37 profesores, 25 de ellos enseñan matemática, 12 enseñan comunicación y 6 enseñan los dos cursos. Los demás enseñan otros cursos. ¿Cuántos profesores enseñan sólo matemática?

2. Se hizo una encuestra entre 100 escolares sobre los deportes que practican. 44 practican atletismo, 46 practican gimnasia y 20 practican ambos deportes. ¿Cuántos practican sólo gimnasia?

3. En un salón de 50 alumnos, 20 estudian inglés y francés, 10 estudian sólo inglés. Si todos los alumnos estudian por lo menos uno de estos idiomas, ¿cuántos alumnos estudian sólo francés?

4. A la entrada de la escuela, se les aplicó a 156 niños una encuesta respecto a sus juguetes favoritos. La encuesta arrojó los siguientes resultados.

   - A 52 niños les gustaba el balón, a 63 les gustaban los carritos, a 87 les gustaban los videojuegos.
   - Además algunos de ellos coinciden en que les gustaba más de un juguete. 26 juegan con el balón y carritos, 37 juegan con carritos y videojuegos, 23 juegan con el balón y los videojuegos; por último 7 expresaron su gusto por las tres.

   a) ¿A cuántos niños les gusta otro juegue no mencionado en la encuesta?

   b) ¿A cuántos niños les gusta solamente jugar con los videojuegos?

   c) ¿A cuántos niños les gusta solamente jugar con el balón.?

5. La secretaría de educación municipal requiere la provisión de 29 cargos docentes en las siguientes áres: 13 profesores de matemática, 13 profesores de física y 15 en sistemas. Para el cubrimiento de los cargos se requiere que 6 dicten matemática y física, 4 dicten física y sistemas, y 5 profesores que dicten matemática y sistemas.

   a) ¿Cuántos profesores se requiere que dicten las tres áreas?

   b) ¿Cuántos profesores se requiere para dictar matemática únicamente?

   c) ¿Cuántos profesores se requiere para dictar matemática y sistemas pero no física?

6. Se encuesta a 150 familias consultando por el nivel educacional actual de sus hijos. Los resultados obtenidos son:

   - 10 familias tienen hijos en enseñanza básica, enseñanza media y universitaria.
   - 16 familias tienen hijos en enseñanza básica y universitaria.
   - 30 familias tienen hijos en enseñanza media y enseñanza básica.
   - 22 familias tienen hijos en enseñanza media y universitaria.
   - 72 familias tienen hijos en enseñanza media.
   - 71 familias tienen hijos en enseñanza básica.
   - 38 familias tienen hijos en enseñanza universitaria.

   Con la información anterior, decucir:

   a) El número de familias que solo tienen hijos universitarios.

b) El número de familias que tienen hijos solo en dos niveles.

c) el número de familias que tiene hijos que no estudian.

7. Una encuesta sobre 500 alumnos inscritos en una o más asignaturas de matemática, física y química durante un semestres, reveló los siguientes números de estudiantes en los cursos indicados: matemática 329, física 186, química 295, matemática y física 83, matemática y química 217, fisica y química 63. Cuántos alumnos están incritos en:

a) Los tres cursos.

b) Matemática pero no química.

c) Química pero no física.

d) Matemática o química, pero no física.

e) Matemática y química, pero no física.

f) Matemática pero no física ni química.

8. En una fiesta a la que asistieron 131 invitados, una persona que estaba aburrida observó que de los 79 invitados que comieron pollo, 28 comieron solamente pollo. Entre las 60 personas que comieron carne vacuna, hubo 21 invitados que también comieron pescado. De los 50 que comieron pescado, 12 comieron sólo pescado. Por alguna razón, 9 comieron las tres cosas.

a) ¿Cuántos comieron pollo y carne vacuna?

b) ¿Cuántos comieron sólo pollo y carne vacuna?

c) ¿Cuántos comieron sólo carne vacuna?

d) ¿Cuántos no comieron ninguna de las tres cosas?

e) ¿Cuántos comieron una sola comida?

f) ¿Cuántos comieron sólo dos comidas?

9. Una encuesta sobre 200 personas acerca del consumo de tres detergentes -Albino, Blancura y Claridad- reveló los siguientes datos:

- 126 personas consumían Claridad.
- 124 personas no consumían Albino.
- 36 usurios de detergente no consumían ni Albino ni Blancura.
- 170 personas consumían por lo menos uno de los tres productos.
- 60 personas consumían Albino y Claridad.
- 40 personas consumían los tres productos.
- 56 personas no consumían Blancura.

a) ¿Cuántas personas consumían solamente Blancura?

b) ¿Cuántas personas consumían Albino y Blancura?

c) ¿Cuántas personas consumían solamente Albino?

10. De una encuesta hecha a 135 personas para establecer preferencias de lectura de las revistas A, B y C, se obtienen los siguientes resultados: Todos leen alguna de las 3 revistas. Todos, menos 40, leen A, 15 leen A y B pero no C, 6 leen B y C pero no A, 10 leen sólo C. El número de los que leen A y C es el doble del número de los que leen las 3 revistas. El número de los que leen sólo B es el mismo que el total de los que leen A y C. ¿Cuántas personas leen solamente A?

Bibliografía utilizada

E. Gentile. Estructuras algebraicas I. (Public. OEA).

Birkhoff-Mc Lane. Algebra moderna.

Lia Oubiña. Introducción a la Teoría de Conjuntos (EUDEBA).