Programación I

Matemática

Unidad 2

Clase 3: Lógica Proposicional y Conjuntos

Presentación

Noción de los conectivos lógicos y su función en una proposición.

Uso de los conectivos "y", "o" y "no" en el contexto de la lógica proposicional.

Objetivos

- Identificar los conectivos lógicos (y, o, no) y comprender su función en una proposición.
- Distinguir entre proposiciones verídicas, falsas y ambiguas utilizando la lógica proposicional.
- Aplicar las leyes y reglas básicas de la lógica proposicional en la simplificación de proposiciones.
- Identificar los distintos procesos para la identificación de las propiedades a utilizar.

Bloques temáticos

- Concepto de proposición
- Proposiciones compuestas
- Tablas de Verdad

Matemática 1
Universidad Tecnológica Nacional

Clase 3

§ 1. Lógica proposicional y conjuntos.

1.1. Vimos que las operaciones básicas de conjuntos están definidas por medio del *no* (para el complemento), del *o no excluyente* para la unión, del *y* para la intersección, y del *o excluyente* para la diferencia simétrica. Estos se llaman conectores lógicos: $\neg$ ("no", o "NOT"), $\vee$ ("o" no excluyente, u "OR"), $\wedge$ ("y", o "AND"), $\veebar$ ("o excluyente", u "XOR"), y se les puede agregar $\Longrightarrow$ (implica, o si ... entonces) y $\iff$ (si y solo si).

1.2. Tablas de verdad de los conectores lógicos:
Sean p, q proposiciones, es decir afirmaciones que son o bien verdaderas o bien falsas, como por ejemplo "hoy es domingo", o "$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$", o "los perros son mamíferos". Las tablas de verdad de los conectores lógicos son las siguientes:

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

p	q	$p \implies q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

p	q	$p \iff q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Las tablas de los conectores lógicos se relacionan con las tablas de las operaciones de conjuntos: Dados A , B conjuntos incluidos en un un conjunto referencial $\mathscr{U}$, y dado un elemento $x \in \mathscr{U}$, se puede pensar en las proposiciones p y q asociadas a A , B (y x) definidas por

$$p : \text{“}x \in A\text{''} \qquad \text{y} \qquad q : \text{“}x \in B\text{''}$$

Notemos que la proposición p es verdadera si y sólo el elemento x de $\mathscr{U}$ pertenece al subconjunto A, y del mismo modo, la proposición q es verdadera si y sólo el elemento x de $\mathscr{U}$ pertenece al subconjunto B. Dado un elemento $x \in \mathscr{U}$ cualquiera, puede pertenecer a A o no. Esto describe dos posibilidades para cualquier elemento de $\mathscr{U}$. Ahora bien, si tenemos dos conjuntos $A, B \subseteq \mathscr{U}$, hay 4 posibilidades para un $x \in \mathscr{U}$: estar en A y en B, no en A pero sí en B, en A pero no en B, y finalmente ni en A ni en B . Así describimos todas las posibilidades para un elemento "genérico" de $\mathscr{U}$. Las tablas de verdad de las operaciones de conjuntos se corresponden con las tablas de verdad de los conectores lógicos de la manera siguiente:

1.3. Tablas de verdad de las operaciones de conjuntos:

- Complemento: El complemento A^c de A en $\mathscr{U}$ se corresponde con $\neg p$.
- Unión: La unión $A \cup B$ se corresponde con $p \vee q$.
- Intersección: La intersección $A \cap B$ se corresponde con $p \wedge q$.
- Diferencia simétrica: La diferencia simétrica $A \triangle B$ se corresponde con $p \veebar q$.
- Inclusión: La inclusión $A \subseteq B$se corresponde con $p \implies q$.
- Igualdad: La igualdad $A = B$ se corresponde con $p \iff q$.

1.4. Ejemplo. La tabla de la diferencia $A \setminus B$ se obtiene de la igualdad $A \setminus B = A \cap B^c$:

A	B	B^c	$A \setminus B$
V	V	F	F
F	V	F	F
V	F	V	V
F	F	V	F

1.5. Ejemplo. Una de las leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	V

Se observa que las columnas correspondientes a $(A \cup B)^c$ y a $A^c \cap B^c$ son exactamente las mismas, o sea los elementos pertenecen a $(A \cup B)^c$ si y solo si pertenecen a $A^c \cap B^c$. Luego, los dos conjuntos son iguales.

1.6. Ejemplo. $A \cap B \subseteq (B \setminus C) \cup (A \cap C)$:

A	B	C	$A \cap B$	$B \setminus C$	$A \cap C$	$(B \setminus C) \cup (A \cap C)$	$A \cap B \subseteq (B \setminus C) \cup (A \cap C)$
V	V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V
V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

Vemos que la columna correspondiente a la inclusión es Verdadera siempre, lo que implica que es verdad que $A \cap B \subseteq (B \setminus C) \cup (A \cap C)$.

1.7. Ejemplo. $A^c \cap B = B \implies A \cap B = \emptyset$

A	B	A^c	$A^c \cap B$	$A \cap B$
V	V	F	F	
F	V	V	V	F
V	F	F	F	F
F	F	V	F	F

Comparando la segunda y la cuarta columna, se ve que $A^c \cap B = B$ cuando no se está en la primera fila, o sea cuando no se está en el caso de algún $x \in A$, $x \in B$. Por lo tanto, esta fila no cumple con la hipótesis y se la olvida. Para las demás filas, $A \cap B$ da siempre Falso, es decir, no existe ningún elemento $x \in A \cap B$. Por lo tanto, $A \cap B = \emptyset$.

1.8. Ejercicios.

1. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial $\mathcal{U}$, utilizando tablas de verdad. Para las que no sean verdaderas, dar un contraejemplo.

a) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$

b) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$

c) $C \subseteq A \implies B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$

d) $A \triangle B = \emptyset \implies A = B$

2. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Usando tablas de verdad, probar que

a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

b) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

c) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

d) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

e) $A \subseteq B \implies A \triangle B = B \cap A^c$

f) $A \subseteq B \implies B^c \subseteq A^c$

g) $A \cap C = \emptyset \implies A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

3. Sean $A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$

4. Sean A, B y C conjuntos. Probar que

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

d) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

Bibliografía utilizada

Álgebra de Armando O. Rojo.
L. T. Gamut, Introducción a la logica, Eudeba, Buenos Airçes, (2002).