1

Matemática

Clasificación de las Relaciones

Centro de e-Learning
UTN.BA

1. Definición de Relación en un Conjunto

- Una relación en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano A × A.
- Es decir, si $R \subseteq A \times A$, entonces R es una relación en A.

•Ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, entonces: $R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,1), (1,4), (4,1), (4,2), (5,6), (6,6)\}$

A

·1
·2 ·3
·4 ·6
·5 ·7

$A \times A = \{(1;1)(1;2)(1;3)(1;4)(1;5)(1;6)(1;7)$
$(2;2)(2;1)(2;3)(2;4) \ldots \ldots$
$(3;3);(3;1)(3;2) \ldots \ldots \}$

$\# A \times A = 7 \times 7 \Rightarrow 49$ pares ordenados

4

3. Relaciones Reflexivas

Pertenece

- Una relación R en A es reflexiva si para todo a en A, se cumple que (a,a) ∈ R.

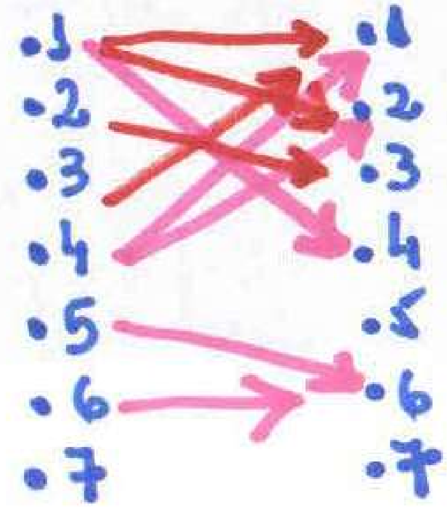
∀ el dato

- Ejemplo: En la relación R dada, (1,1) y (6,6) están en R, pero (2,2) no está en R, por lo que la relación no es reflexiva..

$R = \{(1;1)(1;2)(2;3)(3;1)(1;4)$
$(4;1)(4;2)(5,6)(6;6)\}$ 3

2. Representación Gráfica de Relaciones

- Se pueden representar mediante grafos dirigidos.
- Cada elemento de A es un nodo.
- Los pares ordenados representan flechas entre nodos.
- Los bucles indican relaciones reflexivas (ejemplo: (1,1) y (6,6)).



Ejemplo 1 Relación Reflexiva

$\boxed{R \ldots \text{ es igual a } \ldots}$

$A = \{1;2;3\}$ $R = \{(1;1)(2;2)(3;3)\}$

$(1;1) \in R$
$(2;2) \in R$
$(3;3) \in R$
$(1;3) \notin R$

Definición de Reflexiva

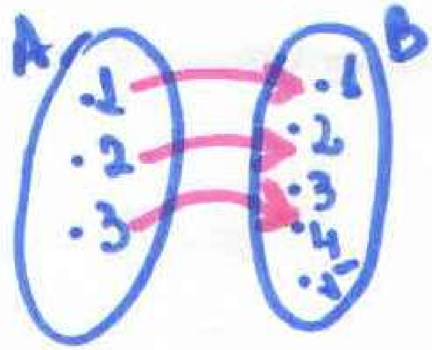
R es reflexiva: $\forall x \in A : xRx$

$\forall$ para todo

Ejemplo 2 Prop. Reflexiva

$A = \{1;2;3\}$ $B = \{1;2;3;4;5\}$

$R \ldots$ es igual a ...



Reflexiva

$\forall a \in A \Rightarrow (a;a)$

$\cdot a$

Ej $A = \{1;6;2\}$

$\cdot 1$ $\quad \cdot 6$

$\cdot 2$

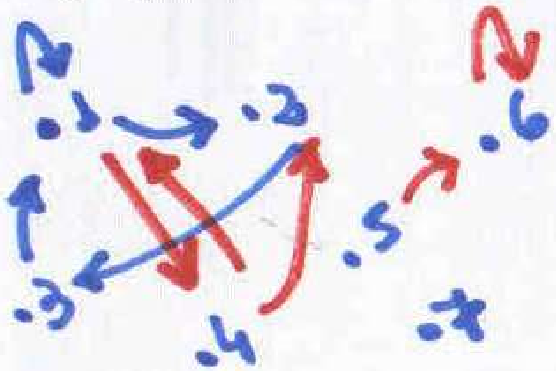
$R = \{(1;1)(6;6)\}$

No es reflexiva

$(2;2) \notin R$

4. Relaciones Simétricas

- Una relación R en A es simétrica si (a, b) ∈ R implica que (b, a) ∈ R.
- Ejemplo: La relación no es simétrica si (1,2) ∈ R pero (2,1) ∉ R.



(1;4) (4;1)

(1;3) ~~(3;1)~~ → ~~Simétrica~~

(4;2) ~~(2;4)~~ → ~~Simétrica~~

R es simétrica si

$\forall x;y \in A: x R y \Rightarrow y R x$

Centro de e-Learning UTN.BA

Simétrica

$$a, b \in A \rightarrow aRb \Rightarrow bRa$$

Ej¹ $A = \{1; 2\}$

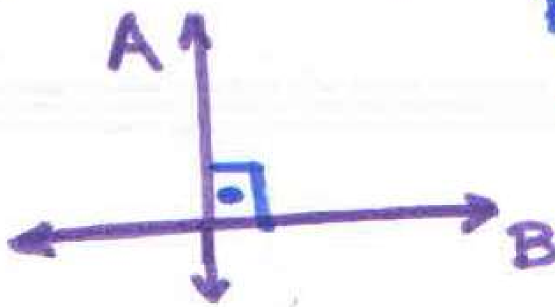
Simétrica ✓

$1R2 \Rightarrow 2R1$

Ej² $A = \{1; 2\}$

$$\underbrace{1R2 \Rightarrow 2 \not{R} 1}_{\text{No es simétrica.}}$$

Ejemplo 2: R ... es perpendicular a (forman 90° al cortarse)

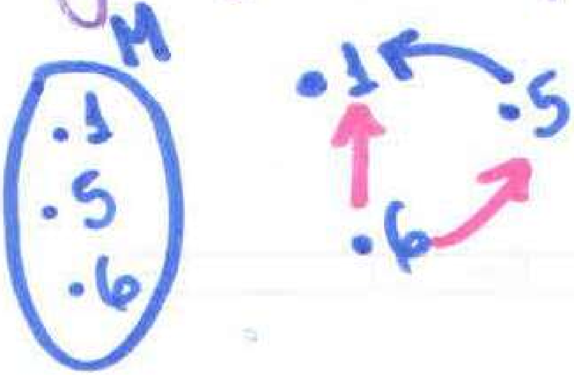


~~Reflexiva~~: A B

$A \not\perp A$ $\quad B \not\perp B$

Simétrica: $A \perp B \Rightarrow B \perp A$ ✓

Ejemplo 3: R ... es mayor que ...



~~Reflexiva~~

~~Simétrica~~

Asimétrica $aRb \Rightarrow b \not R a$

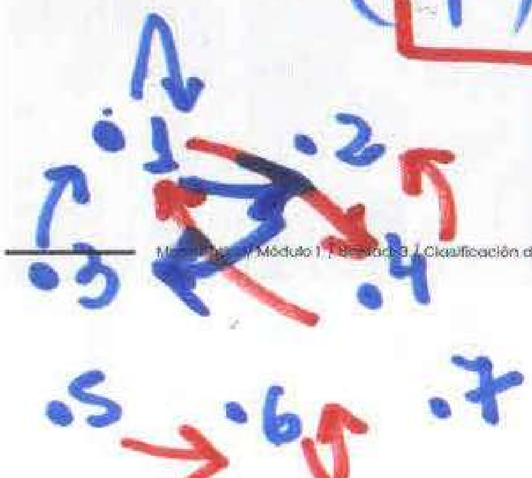
R es transitiva si:

$\forall x; y; z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

5. Relaciones Transitivas

- Una relación R en A es transitiva si (a, b) ∈ R y (b, c) ∈ R implica que (a, c) ∈ R.
- Ejemplo: Si (1,2) y (2,3) están en R, pero (1,3) no está en R, entonces no es transitiva.

$(a; b) \in R \wedge (b; c) \in R \Rightarrow (a; c) \in R$



$(1; 2) \in R \wedge (2; 3) \in R \Rightarrow (1; 3) \notin R$

~~Transitiva~~

$R = \{ (2;2)\ (3;3)\ (6;6)\ (8;8)\ (12;12)$
$(2;6)\ (2;8)\ (2;12)\ (3;6)\ (3;12)$
$(6;12) \}$

Transitiva $\quad (2;6) \wedge (6;12) \Rightarrow (2;12)$

$(\overset{a}{2};\overset{b}{8}) \wedge (\overset{b}{8};\overset{c}{8}) \Rightarrow (2;8)$

Condición

$(2;6) \wedge (6;6) \Rightarrow (2;6)$

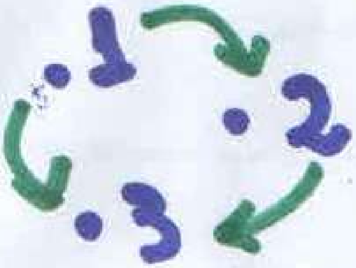
Transitiva

(13)

$$\underbrace{aRb \wedge bRc} \Rightarrow aRc$$

$\forall\, a, b, c \in A$

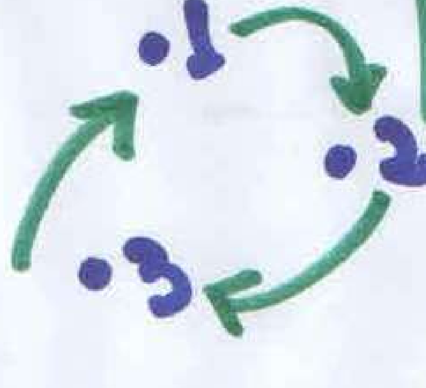
Ej¹ $A = \{1, 2, 3\}$



$$1R2 \wedge 2R3 \Rightarrow 1R3$$

Transitiva ✓

Ej²



$$\boxed{1R2 \wedge 2R3} \Rightarrow$$

$$3R1$$

~~Transitiva~~

Ejemplo

$A = \{1\}$

Reflexiva
Simétrica
Transitiva

Equivalencia

R ... es igual a ...

- Reflexiva ✓ $(a;a) \in R$

$(1;1) \in R$

- Simétrica ✓ $(a;b) \in R \rightarrow (b;a) \in R$

- Transitiva ✓

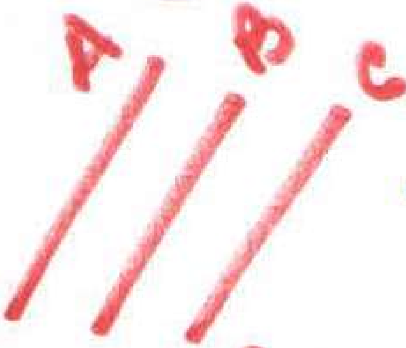
$(a;b) \in R \wedge (b;c) \in R \Rightarrow (a;c) \in R$

Propiedad Transitiva

$\mathcal{G}$ R ... es paralela a ...

Es de Equivalencia

$A \parallel B \parallel C$



• Reflexiva ✓

$A \parallel A$ ✓
$B \parallel B$ ✓
$C \parallel C$ ✓

• Simétrica ✓

$ARB \Rightarrow BRA$
$BRC \Rightarrow CRB$
$ARC \Rightarrow CRA$

• Transitiva ✓

$A \parallel B \wedge B \parallel C \Rightarrow A \parallel C$

$B \parallel C \wedge C \parallel A \Rightarrow B \parallel A$

6. Relaciones de Equivalencia

- Una relación de equivalencia cumple **tres** propiedades:
    1. **Reflexiva**
    2. **Simétrica**
    3. **Transitiva**

8. Clases de orden

- Una relación de orden si cumple **tres** propiedades:
  1. **Reflexiva**
  2. **Antisimétrica**
  3. **Transitiva**

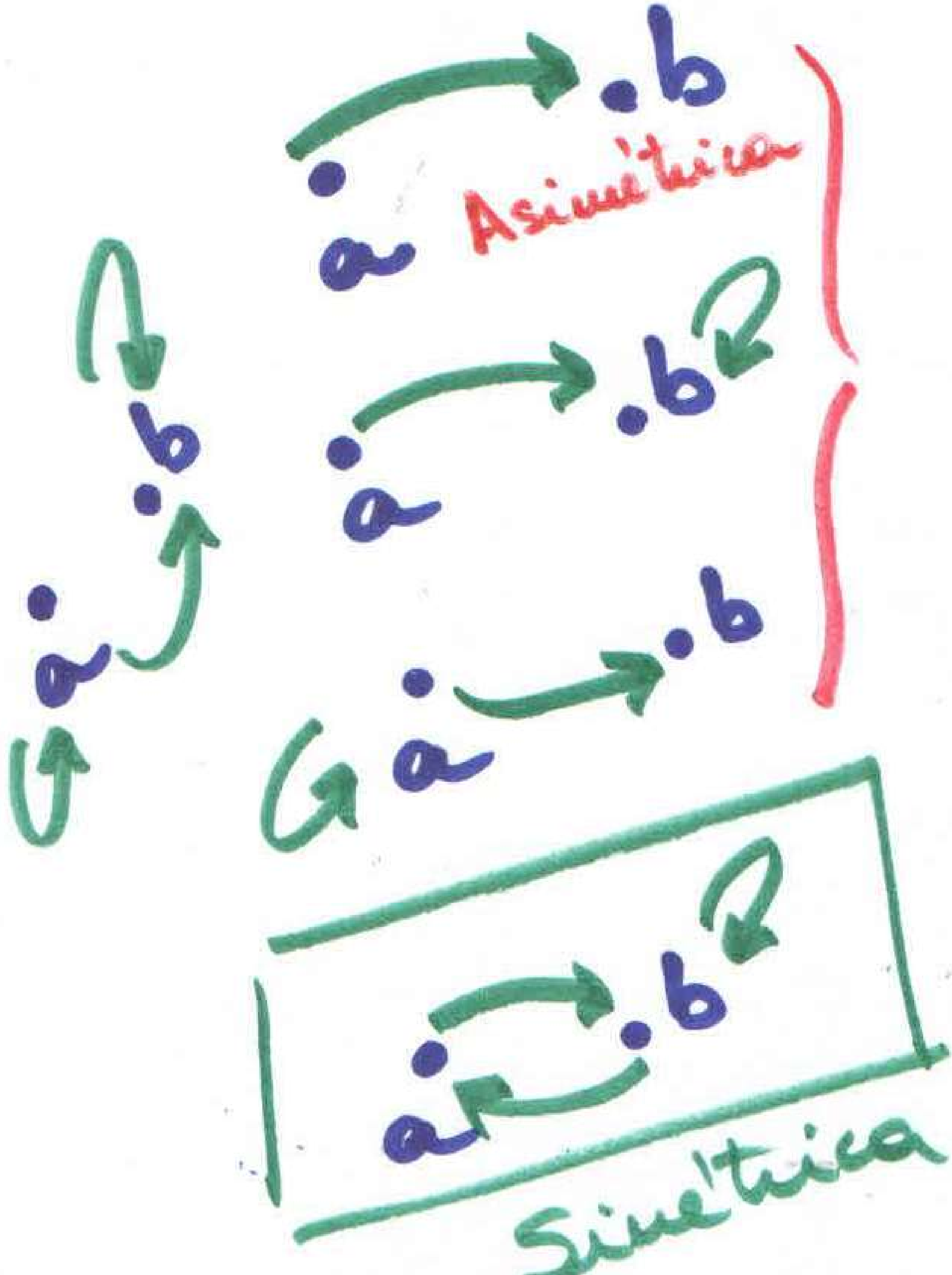
16

Relación
- Reflexiva ✓
- Simétrica ✓
- Transitiva ✓

Relación de Equivalencia

Relación de Orden
- Reflexiva
- Antisimétrica
- Transitiva.

Antisimétrica

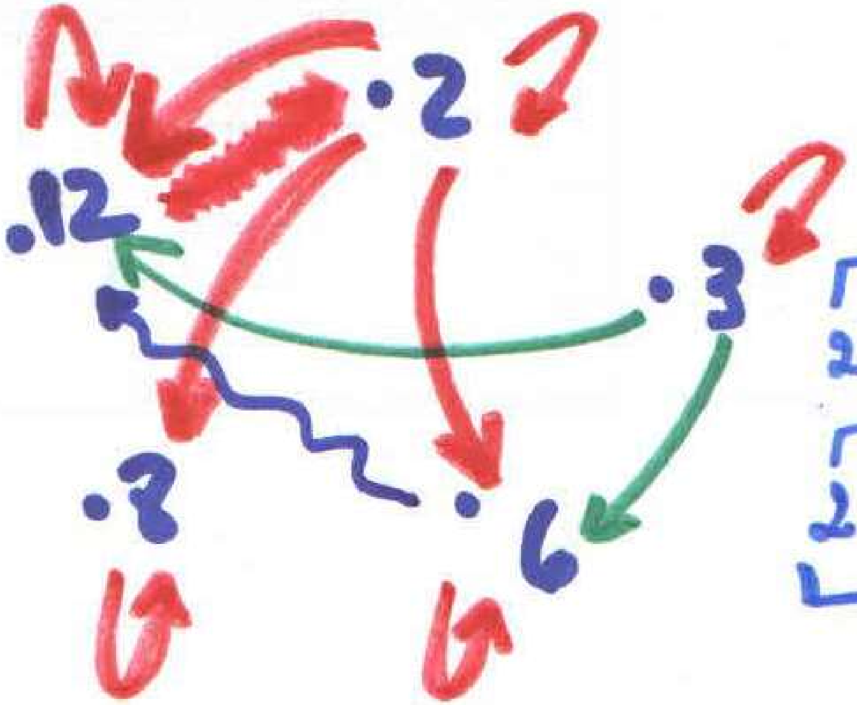


$\forall x; y \in A: xRy \wedge x \neq y \Rightarrow y \not R x.$ Hay bucle

Relación de Orden

R ... es divisor de ...

$A = \{2, 3, 6, 8, 12\}$



$\boxed{2R8 \wedge 8R8 \Rightarrow 2R8}$

$\boxed{2R2 \wedge 2R8 \rightarrow 2R8}$

Reflexiva ✓

~~Simético~~ → Antisimétrica.

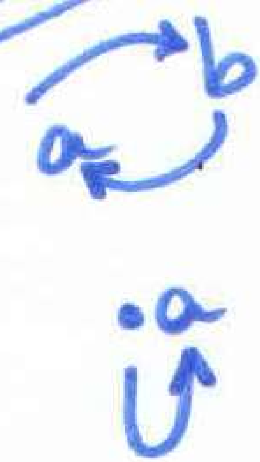
Transitiva ✓

Transitiva

$$\underbrace{(a;b) \wedge (b;c)}_{\text{Condición}} \Rightarrow (a;c)$$

Asimétrica

Simétrica



Antisimétrica