Universidad Tecnológica Nacional

Matemática 1

§ Práctica 3. Relaciones

1. Sean $A = \{1,2,3\}$, $\quad B = \{1,3,5,7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y, en caso afirmativo, graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B, y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

a) $\mathscr{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,5)\}$
b) $\mathscr{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,2),(3,5)\}$
c) $\mathscr{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,3),(3,5)\}$
d) $\mathscr{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,3),(3,7)\}$
e) $\mathscr{R} = \{(1,1),(2,7),(3,7)\}$
f) $\mathscr{R} = \{(1,3),(2,1),(3,7)\}$

2. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B:

a) $(a,b) \in \mathscr{R} \iff a \le b$ A) {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7)}
b) $(a,b) \in \mathscr{R} \iff a > b$
c) $(a,b) \in \mathscr{R} \iff a \cdot b$ es par
d) $(a,b) \in \mathscr{R} \iff a + b > 6$

3. Sea $\mathscr{R} = \{(x,X) \in \{a,b,c\} \times \mathscr{P}(\{a,b,c\}) : \quad x \in X\}$.

Dar por extensión esta relación y representar gráficamente haciendo el grafo y el gráfico de la misma.

4. Hacer el gráfico de cada una de las relaciones siguientes:

a) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in [-2,3] \times [0,7] : \quad x^2 = y\}$
b) $\mathscr{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \quad |x| + |y| \le 1\}$

5. Para cada una de las siguientes relaciones, hallar explícitamente el conjunto de pares ordenados y hacer el grafo correspondiente.

a) $\mathscr{R} = \{(x,y) \in A \times A : \quad x \le y\}$ donde $A = \{1,2,3,6,7\}$.
b) $\mathscr{R} = \{(x,y) \in A \times A : \quad x$ divide a $y\}$ donde $A = \{1,2,3,4,5,6,10,12\}$
c) $\mathscr{R} = \{(X,Y) \in \mathscr{P}(\{a,b,c\}) \times \mathscr{P}(\{a,b,c\}) : \quad X \subseteq Y\}$

6. **a)** Encontrar la relación inversa de cada una de las relaciones de los ejercicios 4 y 5.

b) Hacer el gráfico de las relaciones inversas de las dadas en el ejercicio 4, y el grafo de las inversas de las relaciones consideradas en el ejercicio 5.

7. Hallar $\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2$ en los siguientes casos.

a) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad x = y\}$
$\mathscr{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad y = x + 2\}$

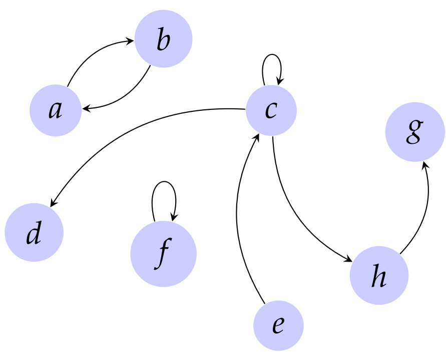
b) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad y = x^2 + 1\}$
$\mathscr{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad y = 3x + 2\}$

c) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \quad y = 2x - 1\}$
$\mathscr{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \quad y = 3x^2\}$

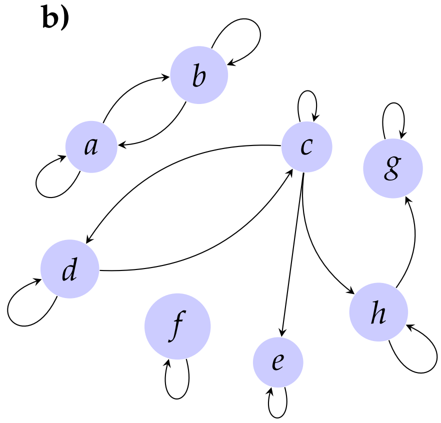
d) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad x < 6, y = 2x + 1\}$
$\mathscr{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad x > 10, y = x - 1\}$

8. Sea $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos, describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

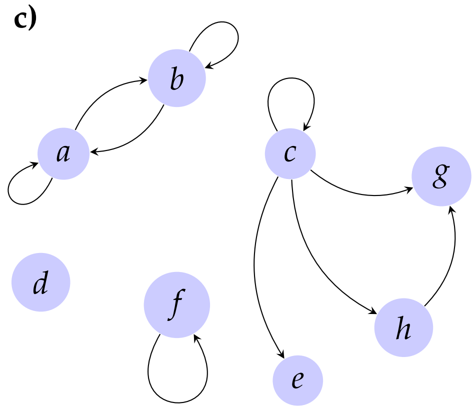
a)



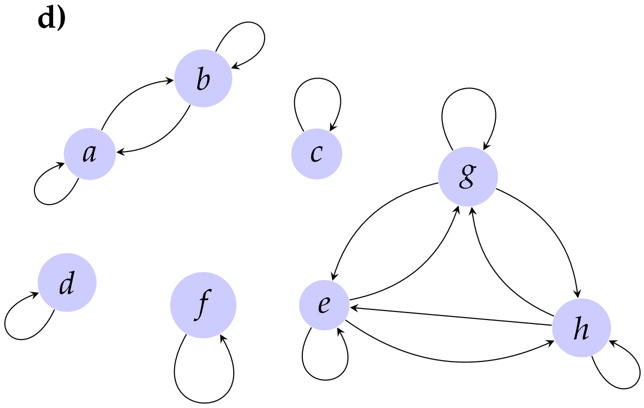
b)



c)



d)

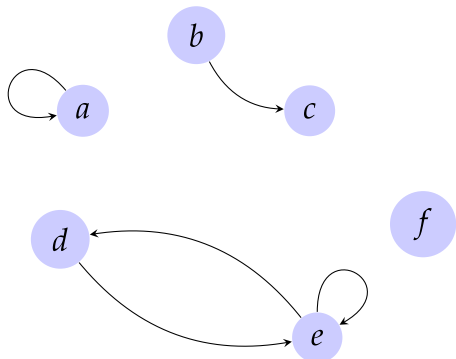


9. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hacer el grafo de la relación

$$\mathscr{R} = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (6,4), (4,6), (4,4), (6,6)\}$$

como está hecho en el ejercicio anterior.

10. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathscr{R}$ la relación en A representada por el grafo



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathscr{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

a) Reflexiva.

b) Simétrica.

c) Transitiva.

d) Reflexiva y simétrica.

e) Simétrica y transitiva.

f) De equivalencia.

11. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathscr{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva de equivalencia o de orden.

a) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathscr{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

b) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathscr{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

c) $A = \{1,2,3,4,5\}$,
$\mathscr{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(2,5),(1,5)\}$

d) $A = \mathbb{N}$, $\quad \mathscr{R} = \{(a,b) : a+b \text{ es par }\}$

e) $A = \mathbb{Z}$, $\quad \mathscr{R} = \{(a,b) : \quad |a| \leq |b|\}$

f) $A = \mathbb{N}$, $\quad \mathscr{R}$ definida por $a \mathscr{R} b$ $\quad$ si, y sólo si, b es múltiplo de a.

g) $A = \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $\mathscr{R}$ definida por $X \mathscr{R} Y$ $\quad$ si, y sólo si, $\quad X \cap \{1,2,3\} \subseteq Y \cap \{1,2,3\}$.
(Recordar que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ es el conjunto de partes de $\mathbb{R}$)

12. Sea $A = \{a,b,c,d,e,f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$$\begin{aligned}\mathscr{R} = \{&(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,f),(f,a),\\ &(b,f),(f,b),(c,e),(e,c)\}\end{aligned}$$

hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathscr{R}$.

13. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Hallar y hacer el grafo de la relación de equivalencia en A asociada a la partición

$$\{\{1,3\},\{2,6,7\},\{4,8,9,10\},\{5\}\}$$

14. Demostrar que en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, la relación siguiente es de equivalencia:

$$(m,n)\mathscr{R}(p,q) \text{ si y sólo si } mq = np$$

Hallar $\overline{(-2,6)}$ y $\overline{(0,1)}$.

15. Probar que las siguientes relaciones en $\mathbb{R}$, son de equivalencia.

a) $x\mathscr{R}y$ si y sólo si $x^2 - y^2 = 3x - 3y$.
Hallar $\overline{0}, \overline{2}, \overline{a}$.

b) $x\mathscr{R}y$ si y sólo si $x^3 + 2y = y^3 + 2x$.
Hallar $\overline{3}$ y $\overline{5}$.

16. Si $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ son relaciones de equivalencias en un conjunto A, probar que $\mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2$ también es una relación de equivalencia.

17. Determinar qué relaciones del ejercicio 2 son funciones de A en B, y qué relaciones del ejercicio 11 son funciones de A en A.

18. Determinar si $\mathscr{R}$ es una función de A en B en los casos

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$,
$\mathscr{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$

b) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathscr{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} / \quad a = 2b - 3\}$

c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathscr{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \quad a + b \text{ es divisible por } 5\}$