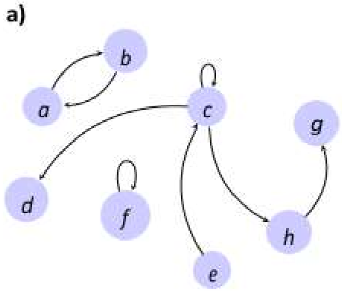
Universidad Tecnológica Nacional

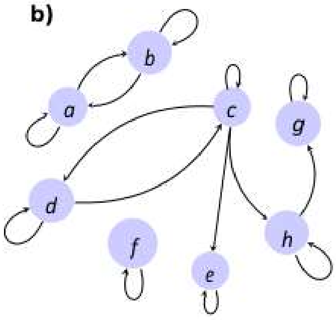
- **Práctica 3**

8. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos, describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

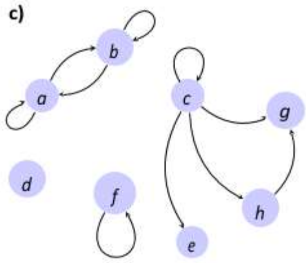
a)



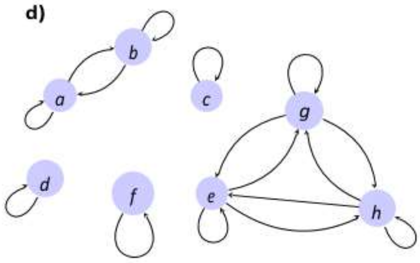
b)



c)



d)



Recordemos las condiciones que se deben cumplir para que la relación sea…

Reflexiva: la relación R debe incluir a (x, x) para todos los elementos de A.

Simétrica: si (x, y) pertenece a R entonces también de pertenecer (y, x).

Antisimétrica: si (x, y) y (y, x) pertenecen a R entonces $x = y$.

Transitiva: si (x, y) y (y, z) pertenecen a R entonces (x, z) también debe pertenecer a R.

a) $R_1 = \{(a, b), (b, a), (c, c), (c, d), (c, h), (e, c), (f, f), (h, g)\}$

No es reflexiva, ya que no todos los elementos se relacionan con sí mismos. Falta por ejemplo (a, a).

No es simétrica ya que falta, por ejemplo, (d, c).

No es antisimétrica ya que, por ejemplo, (a, b) y (b, a) pertenecen a R_1 pero $a \neq b$.

No es transitiva ya que, por ejemplo, (c, h) y (h, g) pertenecen a R_1 pero falta (c, g).

b) $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c), (c, d), (c, e), (c, h), (d, d), (d, c), (e, e), (f, f), (g, g), (h, h), (h, g)\}$

Es reflexiva, ya que todos los elementos se relacionan con sí mismos.

No es simétrica ya que falta, por ejemplo, (e, c).

No es antisimétrica ya que, por ejemplo, (c, d) y (d, c) pertenecen a R_2 pero $c \neq d$.

No es transitiva ya que, por ejemplo, (d, c) y (c, e) pertenecen a R_2 pero falta (d, e).

c) $R_3 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c), (c, e), (c, h), (c, g), (f, f), (h, g)\}$

No es reflexiva, ya que no todos los elementos se relacionan con sí mismos. Falta por ejemplo (e, e).

No es simétrica ya que falta, por ejemplo, (h, c).

No es antisimétrica ya que, por ejemplo, (a, b) y (b, a) pertenecen a R_3 pero $a \neq b$.

Es transitiva ya que tenemos que (a, b) y (b, a) pertenecen a R_3 y (a, a) también pertenece – como así también el par (b, b) -. Y además tenemos que (c, h) y (h, g) pertenecen a R_3 y (c, g) también lo hace.

d)
$R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c), (d, d), (e, e), (e, g), (e, h), (f, f), (g, g), (g, e), (g, h), (h, h), (h, e), (h, g)\}$

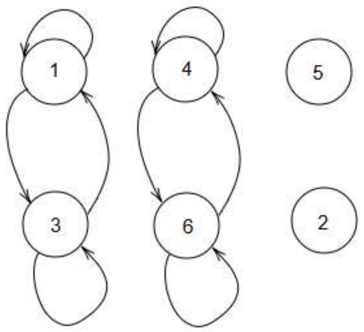
Es reflexiva, ya que todos los elementos se relacionan con sí mismos.

Es simétrica ya que todos los pares (x, y) tienen su contraparte (y, x).

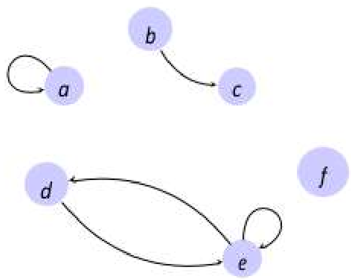
No es antisimétrica ya que, por ejemplo, (e, g) y (g, e) pertenecen a R_4 pero $e \neq g$.

Es transitiva ya que tenemos que en los casos que se cumple que (x, y) y (y, z) pertenecen a R_4, también se da que (x, z) pertenece a R_4. Como, por ejemplo, (g, h) y (h, e) pertenecen a R_4 y también lo hace (g, e).

9.Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hacer el grafo de la relación
$R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)\}$ como está hecho en el ejercicio anterior.



10. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea R la relación en A representada por el grafo.



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a R de manera que la nueva relación obtenida sea

a) Reflexiva.

b) Simétrica.

c) Transitiva.

d) Reflexiva y simétrica.

e) Simétrica y transitiva.

f) De equivalencia.

Tenemos que $R = \{(a, a), (b, c), (d, e), (e, e), (e, d)\}$

a) Para que la relación sea reflexiva la misma debe incluir a (x, x) para todos los elementos de A. Faltan $(b, b), (c, c), (d, d)$ y (f, f) es decir, faltan 4 pares.

b) Para que la relación sea simétrica en la misma se debe cumplir que, si (x, y) pertenece a R entonces también de pertenecer (y, x). Falta solamente un par: (c, b).

c) Para que la relación sea transitiva en la misma se debe cumplir que, si (x, y) y (y, z) pertenecen a R entonces (x, z) también debe pertenecer a R. Tenemos a (d, e) y (e, d), ya que ambos pertenecen a R y (e, e) también lo hace. Pero, nos falta (d, d), por lo tanto, es necesario un par.

d) Para que la relación sea reflexiva y simétrica debe cumplir con las condiciones de a) y b) en simultáneo. Faltan 5 pares: $(b, b), (c, c), (d, d), (f, f)$ y (c, b).

e) Para que la relación sea simétrica y transitiva debe cumplir con las condiciones de b) y c) en simultáneo. Faltan 2 pares: (c, b) y (d, d).

f) Para que la relación sea de equivalencia debe ser reflexiva, simétrica y transitiva (debe cumplir con las condiciones de a) b) y c) en simultáneo). Faltan 5 pares: $(b, b), (c, c), (d, d), (f, f)$ y (c, b).

11. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación R en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva de equivalencia o de orden.

Recordemos las condiciones para que R sea…

Reflexiva: para todo a perteneciente a A, debe existir (a, a) perteneciente a R.

Simétrica: para todo (a, b) perteneciente a R, debe existir (b, a) perteneciente a R.

Antisimétrica: si (a, b) y (b, a) pertenecen a R, entonces $a = b$.

Transitiva: si (a, b) y (b, c) pertenecen a R, entonces debe existir (a, c) perteneciente a R.

De equivalencia: R debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.

De orden: R debe ser reflexiva, antisimétrica y transitiva.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

Es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva (no hay contraejemplos que demuestren lo contrario), de equivalencia y de orden.

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

No es reflexiva, ya que falta $(6, 6)$ en R. Es simétrica, antisimétrica y transitiva (no hay contraejemplos que demuestren lo contrario. Como no es reflexiva, no es tampoco de equivalencia ni de orden.

c) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(2,5),(1,5)\}$

Es reflexiva, antisimétrica y transitiva (no hay contraejemplos que demuestren lo contrario). No es simétrica, ya que, por ejemplo $(1,5)$ pertenece a R, pero falta $(5,1)$. No es de equivalencia porque no es simétrica. Pero sí es de orden.

d) $A = N$, $R = \{(a,b): a + b\ es\ par\}$

Para que sea reflexiva, (a,a) debe pertenecer a R:

si $(a,a): a + a = 2a$

a es un número natural y el producto de todo número natural multiplicado por 2 siempre será par, por lo tanto (a,a) pertenece a R, entonces R es reflexiva.

Para que sea simétrica, si hay (a,b) perteneciente a R, debe existir (b,a) perteneciente a R:

si $a + b$ es par, entonces $b + a$ también lo será por propiedad conmutativa de la suma. Por lo tanto (b,a) pertenece a R, entonces R es simétrica.

Para que sea antisimétrica, si hay (a,b) y (b,a) pertenecientes a R, entonces $a = b$. Dando un contraejemplo, podemos demostrar que R no es antisimétrica: $(3,5)$ y $(5,3)$ pertenecen a R, ya que $3 + 5 = 5 + 3 = 8$, pero $3 \neq 5$.

Para que sea transitiva, si (a,b) y (b,c) pertenecen a R, entonces debe existir (a,c) perteneciente a R:

Es decir, que si $a + b$ y $b + c$ son pares, entonces $a + c$ también debe serlo. Para que $a + b$ sea par, tiene que suceder que tanto a como b sean ambos números pares o, en su defecto, que los dos sean números impares. Lo mismo pasa con $b + c$, ambos deben ser pares o impares, y, a su vez, ocurre lo mismo con $a + c$. Por lo tanto (a,c) pertenece a R, entonces R es transitiva.

Como R es reflexiva, simétrica y transitiva, también es de equivalencia. Pero, al no ser antisimétrica, R no es de orden.

e) $A = Z$, $R = \{(a,b): |a| \leq |b|\}$

Para que sea reflexiva, (a,a) debe pertenecer a R:

Como $|a| \leq |a|$, entonces (a,a) pertenece a R, por lo tanto es reflexiva.

Para que sea simétrica, si hay (a,b) perteneciente a R, debe existir (b,a) perteneciente a R. Con un contraejemplo, se puede demostrar que R no es simétrica: $(1,2)$ pertenece a R, dado que cumple con $|1| \leq |2|$, pero $(2,1)$ no lo cumple.

Para que sea antisimétrica, si hay (a, b) y (b, a) pertenecientes a R, entonces $a = b$. Dando un contraejemplo, podemos demostrar que R no es antisimétrica: $(-2, 2)$ y $(2, -2)$ pertenecen a R, ya que ambos pares cumplen con la condición $|a| \leq |b|$: $|-2| \leq |2|$ y $|2| \leq |-2|$ pero $-2 \neq 2$.

Para que sea transitiva, si (a, b) y (b, c) pertenecen a R, entonces debe existir (a, c) perteneciente a R: la desigualdad es transitiva en los números enteros, por lo tanto, R lo es.

Como R no es simétrica ni antisimétrica, no es de equivalencia ni de orden respectivamente.

f) $A = N$, R definida por aRb si, y sólo si, b es múltiplo de a.

Para que sea reflexiva, (a, a) debe pertenecer a R: como todo número es múltiplo de sí mismo, se cumple que " a es múltiplo de a", por lo tanto R es reflexiva.

Para que sea simétrica, si hay (a, b) perteneciente a R, debe existir (b, a) perteneciente a R. Con un contraejemplo, se puede demostrar que R no es simétrica: $(1, 3)$ pertenece a R, dado que cumple con "3 es múltiplo de 1", pero $(3, 1)$ no lo cumple, ya que 1 no es múltiplo de 3 dentro de los naturales.

Para que sea antisimétrica, si hay (a, b) y (b, a) pertenecientes a R, entonces $a = b$. Si b es múltiplo de a y a es múltiplo de b, significa que $a = b$. Por lo tanto R es antisimétrica.

Para que sea transitiva, si (a, b) y (b, c) pertenecen a R, entonces debe existir (a, c) perteneciente a R: si b es múltiplo de a y si c es múltiplo de b, entonces c es múltiplo de a. Por lo tanto R es transitiva.

Como R no es simétrica, no es de equivalencia. Pero sí es de orden.

g) $A = P(R)$, R definida por XRY si, y sólo si, $X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$.

(Recordar que $P(R)$ es el conjunto de partes de R).

Para que sea reflexiva, (X, X) debe pertenecer a R: $X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq X \cap \{1, 2, 3\}$ se cumple siempre, entonces R es reflexiva.

Para que sea simétrica, si hay (X, Y) perteneciente a R, debe existir (Y, X) perteneciente a R. Mediante el uso de un contraejemplo, se puede demostrar que R no es simétrica: supongamos que $X = \{2, 5, 8\}$ y $Y = \{2, 3, 5, 7, 8\}$, entonces $X \cap \{1, 2, 3\} = \{2\}$ e $Y \cap \{1, 2, 3\} = \{2, 3\}$ se cumple que $\{2\} \subseteq \{2, 3\}$, por lo que (X, Y) pertenece a R. Pero no es cierto que $\{2, 3\} \subseteq \{2\}$ por lo tanto (Y, X) no pertenece a R y la relación no es simétrica.

Para que sea antisimétrica, si hay (X, Y) y (Y, X) pertenecientes a R, entonces $X = Y$. Usamos el siguiente contraejemplo: si $X = \{2, 5, 8\}$ y $Y = \{2, 5, 7, 8\}$, entonces $X \cap \{1, 2, 3\} = \{2\}$ e $Y \cap \{1, 2, 3\} = \{2\}$, entonces se cumple que $\{2\} \subseteq \{2\}$, por lo que (X, Y) y (Y, X) pertenecen a R, pero $X \neq Y$. Por lo tanto R no es antisimétrica.

Para que sea transitiva, si (X, Y) y (Y, Z) pertenecen a R, entonces debe existir (X, Z) perteneciente a R: si se cumple que $X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$, y que $Y \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Z \cap \{1, 2, 3\}$, entonces se cumplirá que $X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Z \cap \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto R es transitiva.

Como R no es simétrica, no es de equivalencia, y como no es antisimétrica, tampoco es de orden.

12. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\}$ hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d y la partición asociada a R.

Una clase de equivalencia de un elemento x, es el conjunto de todos los elementos que están relacionados con dicho elemento x.

$\overline{a} = \{a, b, f\}$

$\overline{b} = \{a, b, f\}$

$\overline{c} = \{c, e\}$

$\overline{d} = \{d\}$

Una partición es la división de un conjunto en subconjuntos que no comparten elementos entre sí y cuya unión nos dará el conjunto original. La partición asociada a R es el conjunto conformado por las clases de equivalencia.

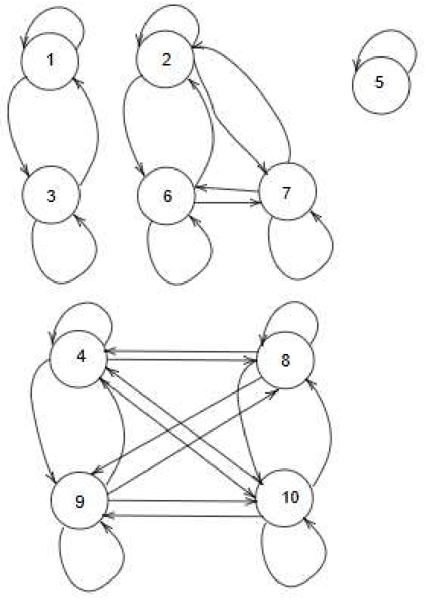
Partición asociada a R: $\{\{a, b, f\}, \{c, e\}, \{d\}\}$

13. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y hacer el grafo de la relación de equivalencia en A asociada a la partición:

$\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\}$

$R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2), (2, 6), (2, 7), (6, 2), (6, 6), (6, 7), (7, 2), (7, 6), (7, 7), (4, 4), (4, 8), (4, 9), (4$

$(8, 4), (8, 8), (8, 9), (8, 10), (9, 4), (9, 8), (9, 9), (9, 10), (10, 4), (10, 8), (10, 9), (10, 10), (5, 5)\}$



14. Demostrar que en $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$, la relación siguiente es de equivalencia:

$$(m, n)R(p, q) \text{ si y sólo si } mq = np$$

Hallar $\overline{(-2, 6)}$ y $\overline{(0, 1)}$.

ZxZ – {0} (m,n)R(p,q) <=> m.q=n.p

Sea (x,y) ∈ZxZ – {0} , veamos que x.y=x.y ⟶ como el producto es conmutativo podemos decir x.y=y.x por lo tanto (x,y) R (x,y) , **R es Reflexiva**.

Sea (x,y)∈ZxZ – {0} y (z,u) ∈ZxZ – {0}, si (x,y) R (z,u) si solo si x.u=y.z , por ser el producto conmutativo en Z , u.x=z.y podemos conmutar la igualdad , z.y=u.x , de aquí podemos decir que (z,u) R (x,y) por lo tanto **R es Simétrica.**

Sea (x,y) ∈ZxZ – {0} , (z,u)∈ZxZ – {0} , (t,v) ∈ZxZ – {0} , si (x,y) R (z,u) y (z,u) R (t,v) se verifica que x.u=y.z(1) , z.v=u.t (2) , despejo z de (2) y reemplazo en (1) z= (u.t)/v y x.u=y.(u.t)/v , si u= 0 la igualdad se verifica, en caso de ser "u" distinto de 0 la simplificamos , y pasamos v multiplicando y nos queda x.v=y.t esto significa que (x,y) R (t,v) por lo tanto **R es Transitiva.**

Podemos concluir que R es una **relación de equivalencia**.

Calculemos la clase del (-2,6) :

Para todo (m,n) ∈ ZxZ – {0} : (m,n) R (-2,6) esto me dice que son todos los pares ordenados que verifican 6m=-2n.

Calculemos la clase del (0,1):

Para todo (m,n) ∈ ZxZ – {0} : (m,n) R (0,1) esto me dice que son todos los pares ordenados que verifican m=0.

15. Probar que las siguientes relaciones en **R**, son de equivalencia.

a) *xRy* si y sólo si $x^2 - y^2 = 3x - 3y$.
Hallar $\overline{0}$, $\overline{2}$, $\overline{a}$.

$$x \epsilon \mathbb{R} : xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 3x - 3y \mapsto x \epsilon \mathbb{R} : x^2 - x^2 = 3x - 3x = 0 \Leftrightarrow xRx$$

R es Reflexiva.

$$x, y \epsilon \mathbb{R} : xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 3x - 3y \Leftrightarrow -(x^2 - y^2) = -(3x - 3y) \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 3y - 3x \Leftrightarrow yRx$$

R es Simétrica.

$$x, y, z \epsilon \mathbb{R} : xRy, yRz \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 3x - 3y, y^2 - z^2 = 3y - 3z$$

Ordenando las variables en ambas ecuaciones nos queda:

$$(1) x^2 - 3x = y^2 - 3y, (2) y^2 - 3y = z^2 - 3z$$

Reemplazo (2) en (1):

$$x^2 - 3x = z^2 - 3z$$

Si ordenamos esta ecuación nos queda:

$$x^2 - z^2 = 3x - 3z$$

Por lo tanto, podemos afirmar que x R z, **R es transitiva.**

Concluimos que **R es una relación de equivalencia.**

Calculemos la clase del 0: $x \epsilon \mathbb{R} : xR0, x^2 - 0^2 = 3x - 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$
resolviendo la cuadrática nos queda que el 0 y 3 están en la clase del 0.

Calculemos la clase del 2: $x \epsilon \mathbb{R} : xR2, x^2 - 2^2 = 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
resolviendo la cuadrática nos queda que 2 y 1 están en la clase del 2.

Calculamos la clase del a: $x \epsilon \mathbb{R} : xRa, x^2 - a^2 = 3x - 3a \Leftrightarrow x^2 - 3x + (-a^2 + 3a) = 0$

b) *xRy* si y sólo si $x^3 + 2y = y^3 + 2x$.
Hallar $\overline{3}$ y $\overline{5}$.

$x \epsilon \mathbb{R} : x^3 - x^3 = 2x - 2x = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x = x^3 + 2x \Leftrightarrow xRx$

R es Reflexiva.

Por simetría de la igualdad en el conjunto Real se verifica que la relación es simétrica.

Veamos si es transitiva:

$x \epsilon \mathbb{R} : xRy, yRz \Leftrightarrow (1*) x^3 + 2y = y^3 + 2x, (2*) y^3 + 2z = z^3 + 2y$

separamos las variables en (1*) y (2*):

$(1*) x^3 - 2x = y^3 - 2y, (2*) y^3 - 2y = z^3 - 2z$

Reemplazo (2*) en (1*):

$$x^3 - 2x = z^3 - 2z$$

Reordenando obtengo:

$$x^3 + 2z = z^3 + 2x \Leftrightarrow xRz$$

Por lo tanto concluimos que R es transitiva.

R es una relación de equivalencia.

Calculamos la clase del 3: $x \epsilon \mathbb{R} : xR3 / x^3 + 6 = 27 + 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x - 21 = 0$

Calculamos la clase del 5: $x \epsilon \mathbb{R} : xR5 / x^3 + 10 = 125 + 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x - 115 = 0$

Todos los x reales que cumplan las ecuaciones pertenecerán a esa clase.

16. Si R_1 y R_2 son relaciones de equivalencias en un conjunto A, probar que $R_1 \cap R_2$ también es una relación de equivalencia.

Sea a∈A(suponemos R1 y R2 son relaciones del conjunto A)→ (por ser R1 y R2 reflexivas) aR1a y aR2a → (a,a) ∈ R1 y (a,a) ∈ R2 por lo tanto $(a, a)\epsilon(R1 \cap R2)$

Concluimos que $a(R1 \cap R2)a$

$(R1 \cap R2)$ **es reflexiva.**

Sea a,b∈A , si (a,b) ∈R1∩R2 → (a,b)∈R1 y (a,b)∈R2 , por ser simétricas R1 y R2 tenemos que bR1a y bR2a ,por lo tanto, (b,a) ∈ R1 y (b,a) ∈ R2 → (b,a) ∈ R1∩R2 , concluimos que b(R1∩R2)a .

$(R1 \cap R2)$ **es simétrica.**

Sea (a,b) ∈R1∩R2 y (b,c) ∈R1∩R2 → (a,b) ∈R1 y (a,b) ∈R2 y (b,c)∈R1 y (b,c) ∈ R2 por ser conmutativa la conjunción podemos agrupar de la siguiente manera: ((a,b)∈R1 y (b,c)∈R1) , ((a,b)∈R2 y (b,c)∈R2) por ser transitivas R1 y R2 tengo que: aR1c y aR2c por lo tanto, (a,c) ∈R1 y (a,c) ∈R2 → (a,c)∈(R1∩R2) concluyendo que a(R1∩R2)c.

$(R1 \cap R2)$ **es transitiva.**

$(R1 \cap R2)$ **Es una relación de equivalencia.**

17. Determinar qué relaciones del ejercicio 2 son funciones de A en B, y qué relaciones del ejercicio 11 son funciones de A en A.

Del ejercicio 2)

Una relación es función de A en B si a cada elemento de A le corresponde uno y solo uno en B.

$A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$

a) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a \leq b$

Obtuvimos: $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (2,3), (2,5), (2,7), (3,3)(3,5), (3,7)\}$

No es función porque cada elemento de A se relaciona con más de un elemento de B.

b) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a > b$

Obtuvimos: $\mathcal{R} = \{(2,1), (3,1)\}$

No es función porque el elemento 1 de A no se relaciona con ningún elemento de B.

c) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a.b$ es par

Obtuvimos: $\mathcal{R} = \{(2,1), (2,3), (2,5), (2,7)\}$

No es función porque los elementos 1 y 3 de A no se relacionan con ningún elemento de B, y el elemento 2 de A se relaciona con más de un elemento de B.

d) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a + b > 6$

Obtuvimos: $\mathcal{R} = \{(1,7), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7)\}$

No es función porque los elementos 2 y 3 de A se relacionan con más de un elemento de B.

Del ejercicio 11)

Una relación es función de A en A si a cada elemento de A le corresponde uno y solo uno en A.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

Es función ya que a cada elemento de A le corresponde uno y solo uno en A.

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

No es función porque el elemento 6 de A no se relaciona con ningún elemento de A.

c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (2,5), (1,5)\}$

No es función porque los elementos 1 y 2 de A se relacionan con más de un elemento de A.

d) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b): a + b \; es \; par\}$

No es función, ya que todos los elementos de A se relacionan con infinitos elementos de A. Por ejemplo, tomemos el elemento 1, hay infinitos elementos de A que satisfacen la condición para que sumado a 1 dé par (1, 3, 5, 7, 9…)

e) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b): |a| \leq |b|\}$

No es función, ya que todos los elementos de A se relacionan con infinitos elementos de A. Por ejemplo, tomemos el elemento 3, hay infinitos elementos de A que satisfacen la condición $|a| \leq |b|$: -3, 3, -4, 4…

f) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $a\mathcal{R}b$ si, y sólo si, b es múltiplo de a.

No es función, ya que todos los elementos de A se relacionan con infinitos elementos de A, esto se debe a que los números naturales tienen infinitos múltiplos.

g) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X\mathcal{R}Y$ si, y sólo si, $X \cap \{1,2,3\} \subseteq Y \cap \{1,2,3\}$.

No es función, ya que hay elementos de A que se relacionan con infinitos elementos de A, esto se debe a que un subconjunto X puede estar incluido en distintos conjuntos de Y.

18. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$

$\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$

No es función porque el elemento 3 de A se relaciona con dos elementos de B.

b) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$,

$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} / a = 2b - 3\}$

$$a = 2b - 3$$

$$a + 3 = 2b$$

$$\frac{a+3}{2} = b$$

$$b = \frac{a+3}{2}$$

Para que b sea un número natural, $a + 3$ debe ser par y $\frac{a+3}{2}$ debe ser un número natural. Pero no todos los elementos de $A = \mathbb{R}$ cumplen con esto, esto quiere decir que hay elementos de A que no se relacionan con ningún elemento de B. Por lo tanto, no es función.

Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es un número real, y por lo antes visto no nos dará como resultado un número natural.

c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$

$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / a + b \textit{ es divisible por } 5\}$

No es función, ya que todos los elementos de A se relacionan con infinitos elementos de B.

Tomemos como ejemplo el 0: este se relaciona con el 5, el 10, el 15 y así infinitamente.