Universidad Tecnológica Nacional

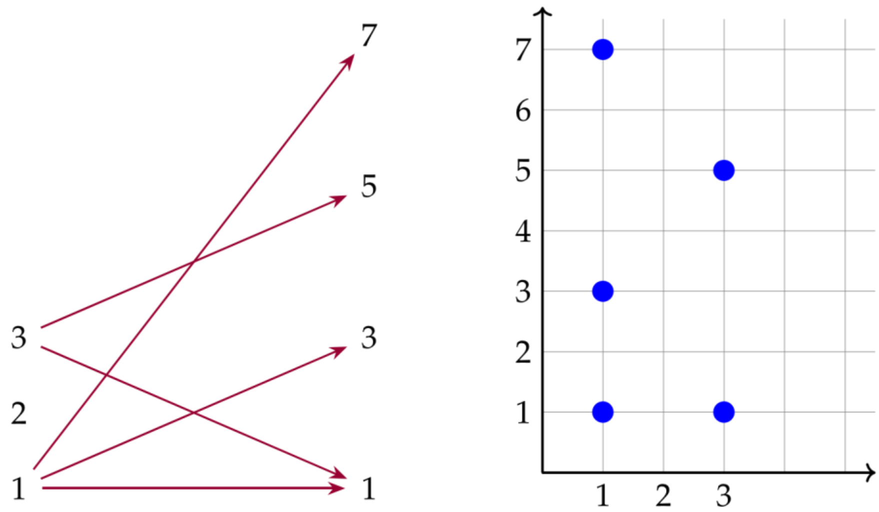
Matemática 1

§ Práctica 3. Relaciones

1. Sean $A = \{1,2,3\}$, $\quad B = \{1,3,5,7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y, en caso afirmativo, representarlas por medio de un grafo y un gráfico.

a) $\mathscr{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,5)\}$

Solución. $\mathscr{R}$ es un subconjunto de $A \times B$, entonces es una relación de A a B.

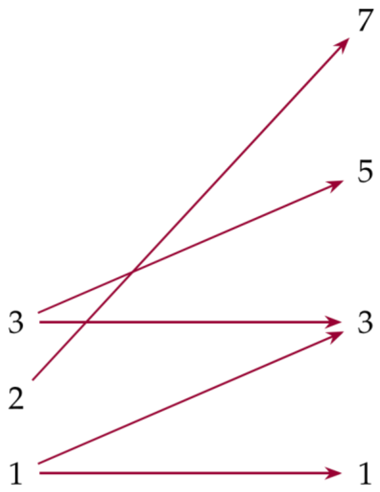


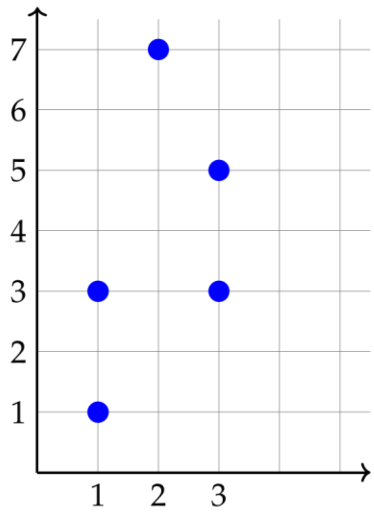
b) $\mathscr{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,2),(3,5)\}$

Solución. $\mathscr{R}$ no es una relación de A a B porque el par $(3,2) \notin A \times B$.

c) $\mathscr{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,3),(3,5)\}$

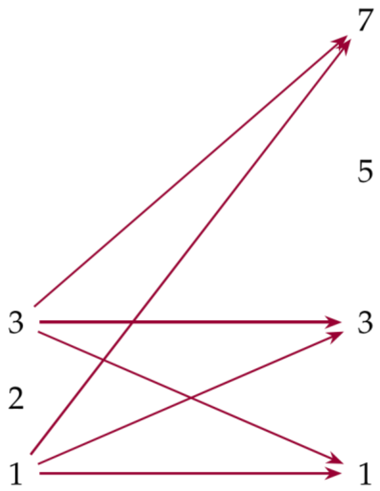
Solución. $\mathscr{R}$ es un subconjunto de $A \times B$, entonces es una relación de A a B.

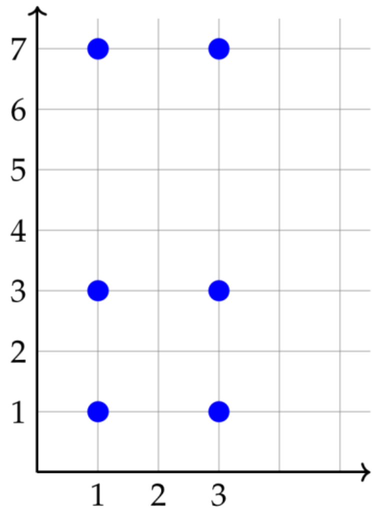




d) $\mathscr{R} = \{(1,1), (1,3), (1,7), (3,1), (3,3), (3,7)\}$

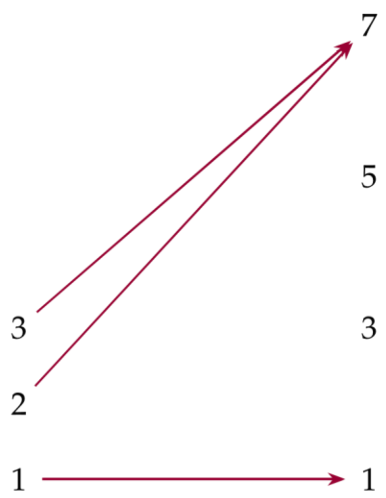
Solución. $\mathscr{R}$ es una relación de A a B porque es un subconjunto de $A \times B$.

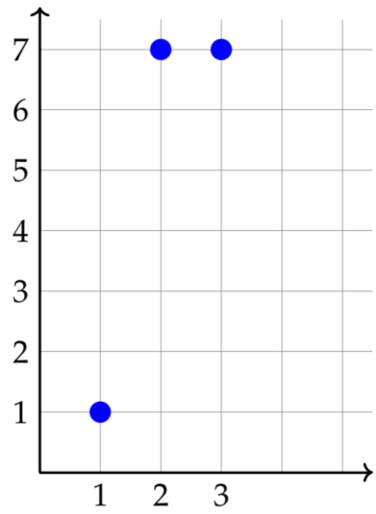




e) $\mathscr{R} = \{(1,1), (2,7), (3,7)\}$

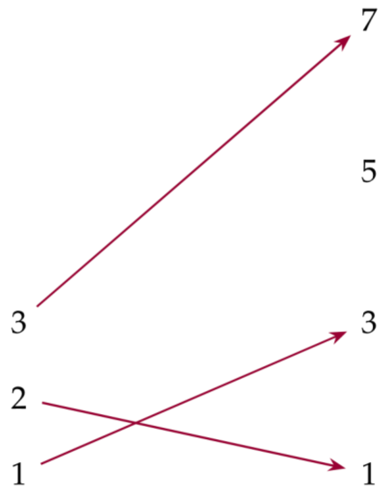
Solución. $\mathscr{R}$ es una relación de A a B porque es un subconjunto de $A \times B$.

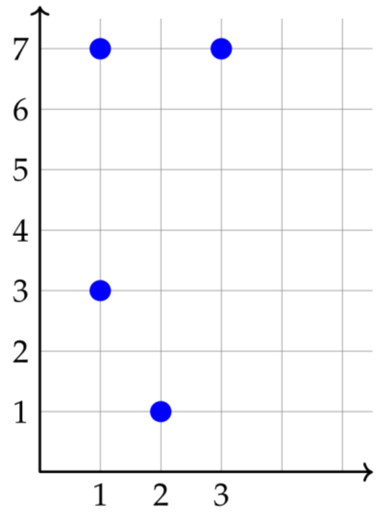




f) $\mathscr{R} = \{(1,3),(2,1),(3,7)\}$

Solución. $\mathscr{R}$ es una relación de A a B porque es un subconjunto de $A \times B$.





2. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B:

a) $(a,b) \in \mathscr{R} \iff a \leq b$

Solución.

- $1 \leq 1$, entonces $(1,1) \in \mathscr{R}$
- $1 \leq 3$, entonces $(1,3) \in \mathscr{R}$
- $1 \leq 5$, entonces $(1,5) \in \mathscr{R}$
- $1 \leq 7$, entonces $(1,7) \in \mathscr{R}$

- $2 \leq 3$, entonces $(2,3) \in \mathscr{R}$
- $2 \leq 5$, entonces $(2,5) \in \mathscr{R}$
- $2 \leq 7$, entonces $(2,7) \in \mathscr{R}$
- $3 \leq 3$, entonces $(3,3) \in \mathscr{R}$
- $3 \leq 5$, entonces $(3,5) \in \mathscr{R}$
- $3 \leq 7$, entonces $(3,7) \in \mathscr{R}$

Luego,

$$\mathscr{R} = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,3),(2,5),(2,7),(3,3),(3,5),(3,7)\}$$

b) $(a,b) \in \mathscr{R} \iff a > b$

Solución.

- $2 > 1$, entonces $(2,1) \in \mathscr{R}$
- $3 > 1$, entonces $(3,1) \in \mathscr{R}$

Luego,

$$\mathscr{R} = \{(2,1),(3,1)\}$$

c) $(a,b) \in \mathscr{R} \iff a \cdot b$ es par

Solución.

- $2 \cdot 1 = 2$, es par, entonces $(2,1) \in \mathscr{R}$
- $2 \cdot 3 = 6$, es par, entonces $(2,3) \in \mathscr{R}$
- $2 \cdot 5 = 10$, es par, entonces $(2,5) \in \mathscr{R}$
- $2 \cdot 7 = 14$, es par, entonces $(2,7) \in \mathscr{R}$

Luego,

$$\mathscr{R} = \{(2,1),(2,3),(2,5),(2,7)\}$$

d) $(a,b) \in \mathscr{R} \iff a + b > 6$

Solución.

- $1 + 7 = 8 > 6$, entonces $(1,7) \in \mathscr{R}$
- $2 + 5 = 7 > 6$, entonces $(2,5) \in \mathscr{R}$
- $2 + 7 = 9 > 6$, entonces $(2,7) \in \mathscr{R}$
- $3 + 5 = 8 > 6$, entonces $(3,5) \in \mathscr{R}$
- $3 + 7 = 10 > 6$, entonces $(3,7) \in \mathscr{R}$

Luego,

$$\mathscr{R} = \{(1,7),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7)\}$$

3. Sea $\mathscr{R} = \{(x, X) \in \{a,b,c\} \times \mathscr{P}(\{a,b,c\}) : \quad x \in X\}$.

Dar por extensión esta relación y representar gráficamente haciendo el grafo y el gráfico de la misma.

Solución. Encontremos, en primer lugar, el conjunto de partes $\mathscr{P}(\{a,b,c\})$ del conjunto $\{a,b,c\}$; esto es, todos los subconjuntos del $\{a,b,c\}$:

$$\mathscr{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Veamos ahora cuáles son los elementos de $\mathscr{R}$:

- $a \in \{a\}$, entonces $(a, \{a\}) \in \mathscr{R}$
- $a \in \{a,b\}$, entonces $(a, \{a,b\}) \in \mathscr{R}$
- $a \in \{a,c\}$, entonces $(a, \{a,c\}) \in \mathscr{R}$
- $a \in \{a,b,c\}$, entonces $(a, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $b \in \{b\}$, entonces $(b, \{b\}) \in \mathscr{R}$
- $b \in \{a,b\}$, entonces $(b, \{a,b\}) \in \mathscr{R}$
- $b \in \{b,c\}$, entonces $(b, \{b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $b \in \{a,b,c\}$, entonces $(b, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $c \in \{c\}$, entonces $(c, \{c\}) \in \mathscr{R}$
- $c \in \{a,c\}$, entonces $(c, \{a,c\}) \in \mathscr{R}$
- $c \in \{b,c\}$, entonces $(c, \{b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $c \in \{a,b,c\}$, entonces $(c, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$

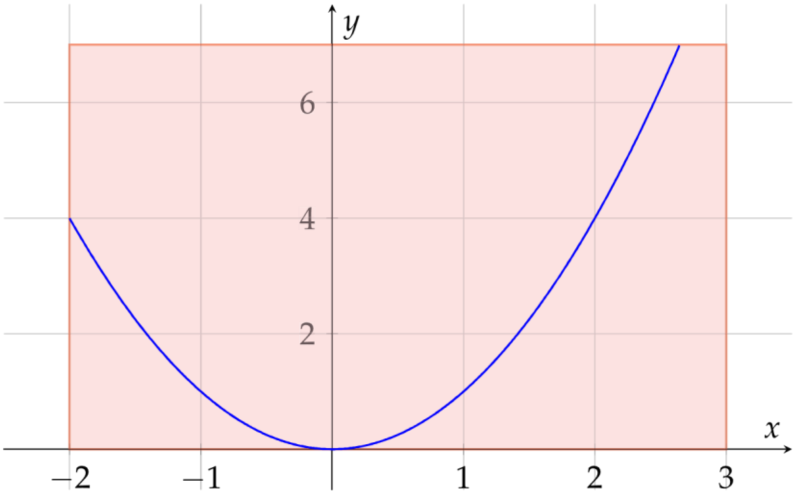
Luego,

$$\begin{aligned}\mathscr{R} = \{&(a,\{a\}),(a,\{a,b\}),(a,\{a,c\}),(a,\{a,b,c\}),\\ &(b,\{b\}),(b,\{a,b\}),(b,\{b,c\}),(b,\{a,b,c\}),\\ &(c,\{c\}),(c,\{a,c\}),(c,\{b,c\}),(c,\{a,b,c\})\}\end{aligned}$$

4. Hacer el gráfico de cada una de las relaciones siguientes:

a) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in [-2,3] \times [0,7] : \quad x^2 = y\}$

Solución.



En el gráfico, la curva azul corresponde a todos los pares (x, y) tales que $x^2 = y$. El recuadro rojo corresponde al producto cartesiano $[-2, 3] \times [0, 7]$

b) $\mathscr{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \quad |x| + |y| \leq 1\}$

Solución. Para ver cuáles son todos los puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$, tenemos que recordar la definición de módulo (o valor absoluto) de un número. Esto es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La primera línea de esta definición quiere decir que si el número x es positivo o 0, entonces $|x| = x$; por ejemplo, $|3| = 3$, $|0.5| = 0.5$, $|1/3| = 1/3$. En cambio, la segunda línea de la definición dice que si el número x es negativo, entonces $|x| = -x$. Esto último significa que es si x es negativo, el módulo de x es igual al opuesto de x. Por ejemplo, $|-3| = 3$, $|-0.5| = 0.5$, $|-1/3| = 1/3$. De la misma manera, se define el módulo de y:

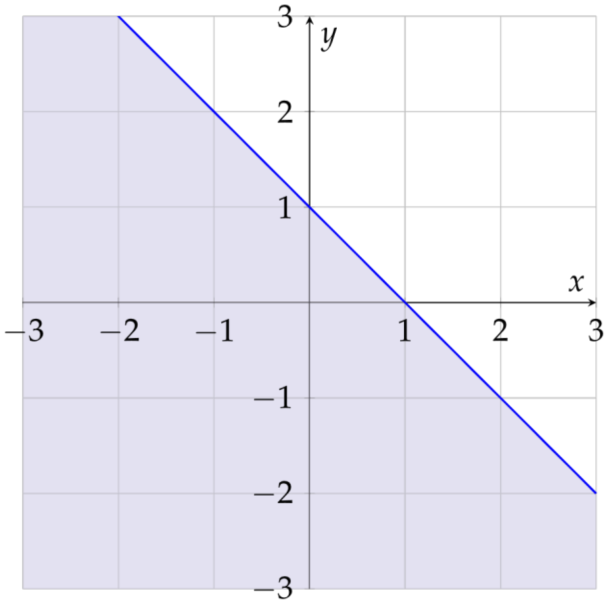
$$|y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Tenemos que considerar entonces 4 posibilidades:

I) $|x| = x \quad$ y $\quad |y| = y$.
En este caso, la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$ es exactamente:

$$x + y \leq 1$$

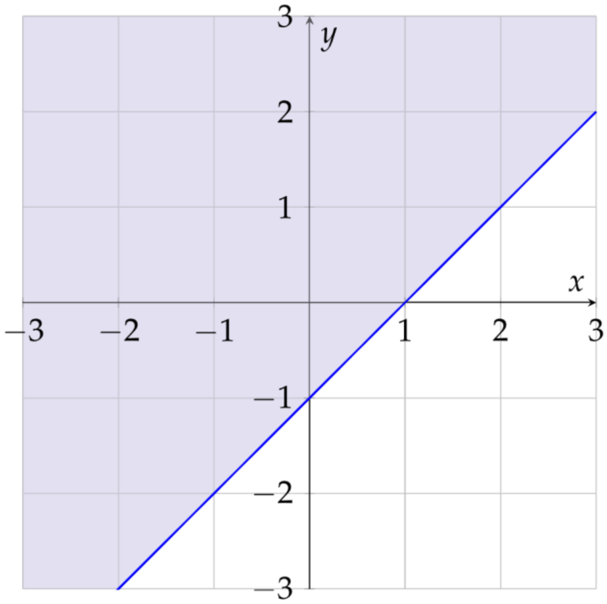
El gráfico correspondiente a esto es:



II) $|x| = x \quad$ y $\quad |y| = -y$.
En este caso, la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$ es exactamente:

$$x + (-y) \leq 1 \quad \text{es decir} \quad x - y \leq 1$$

El gráfico correspondiente a esta desigualdad es:

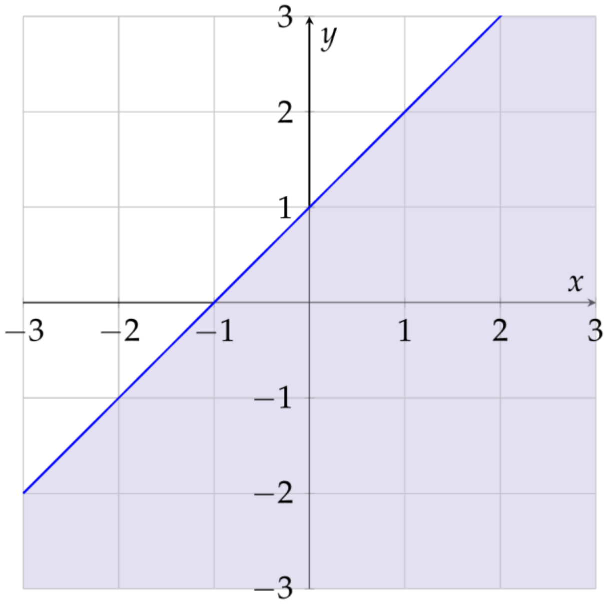


III) $|x| = -x \quad$ y $\quad |y| = y$.

En este caso, la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$ es exactamente:

$$-x + y \leq 1$$

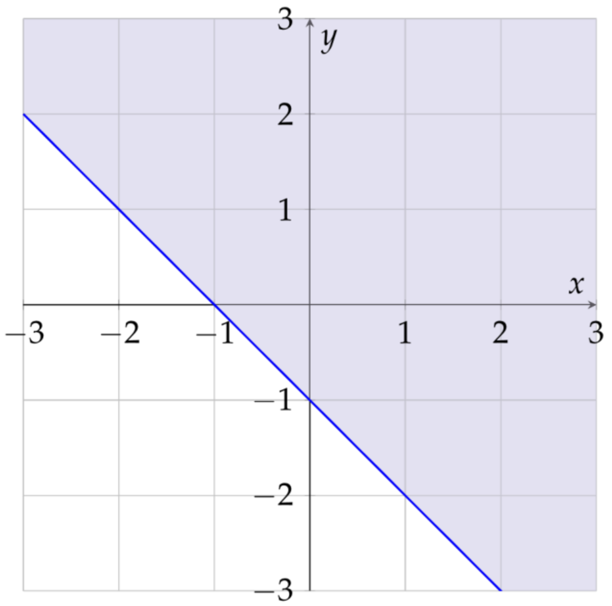
El gráfico correspondiente a esto es:



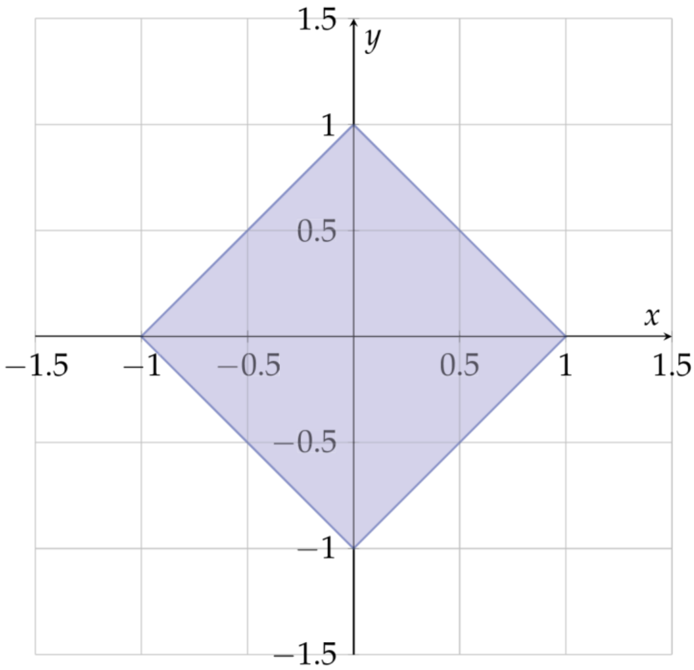
IV) $|x| = -x$ y $|y| = -y$.
En este caso, la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$ es exactamente:

$$-x - y \leq 1$$

El gráfico correspondiente a esto es:



Finalmente, los puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$ son aquellos que pertenecen simultáneamente a las 4 regiones sombreadas anteriormente. Estos son los que se encuentran en el siguiente gráfico:



5. Para cada una de las siguientes relaciones, hallar explícitamente el conjunto de pares ordenados y hacer el grafo correspondiente.

a) $\mathscr{R} = \{(x, y) \in A \times A : \quad x \leq y\}$ donde $A = \{1, 2, 3, 6, 7\}$.

Solución.

- $1 \leq 1$, entonces $(1, 1) \in \mathscr{R}$.
- $1 \leq 2$, entonces $(1, 2) \in \mathscr{R}$.
- $1 \leq 3$, entonces $(1, 3) \in \mathscr{R}$.
- $1 \leq 6$, entonces $(1, 6) \in \mathscr{R}$.
- $1 \leq 7$, entonces $(1, 7) \in \mathscr{R}$.
- $2 \leq 2$, entonces $(2, 2) \in \mathscr{R}$.
- $2 \leq 3$, entonces $(2, 3) \in \mathscr{R}$.
- $2 \leq 6$, entonces $(2, 6) \in \mathscr{R}$.
- $2 \leq 7$, entonces $(2, 7) \in \mathscr{R}$.
- $3 \leq 3$, entonces $(3, 3) \in \mathscr{R}$.
- $3 \leq 6$, entonces $(3, 6) \in \mathscr{R}$.
- $3 \leq 7$, entonces $(3, 7) \in \mathscr{R}$.
- $6 \leq 6$, entonces $(6, 6) \in \mathscr{R}$.
- $6 \leq 7$, entonces $(6, 7) \in \mathscr{R}$.
- $7 \leq 7$, entonces $(7, 7) \in \mathscr{R}$.

Luego,

$$\begin{aligned} \mathscr{R} = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (1,7), (2,2), (2,3), (2,6), (2,7) \\ &(3,3), (3,6), (3,7), (6,6), (6,7), (7,7)\} \end{aligned}$$

b) $\mathscr{R} = \{(x, y) \in A \times A : \quad x \text{ divide a } y\}$ donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12\}$

Solución.

- 1 divide a 1, entonces $(1, 1) \in \mathscr{R}$.
- 1 divide a 2, entonces $(1, 2) \in \mathscr{R}$.
- 1 divide a 3, entonces $(1, 3) \in \mathscr{R}$.
- 1 divide a 4, entonces $(1, 4) \in \mathscr{R}$.
- 1 divide a 5, entonces $(1, 5) \in \mathscr{R}$.
- 1 divide a 6, entonces $(1, 6) \in \mathscr{R}$.
- 1 divide a 10, entonces $(1, 10) \in \mathscr{R}$.
- 1 divide a 12, entonces $(1, 12) \in \mathscr{R}$.
- 2 divide a 2, entonces $(2, 2) \in \mathscr{R}$.
- 2 divide a 4, entonces $(2, 4) \in \mathscr{R}$.

0

1

- 2 divide a 6, entonces $(2,6) \in \mathscr{R}$.
- 2 divide a 10, entonces $(2,10) \in \mathscr{R}$.
- 2 divide a 12, entonces $(2,12) \in \mathscr{R}$.
- 3 divide a 3, entonces $(3,3) \in \mathscr{R}$.
- 3 divide a 6, entonces $(3,6) \in \mathscr{R}$.
- 3 divide a 12, entonces $(3,12) \in \mathscr{R}$.
- 4 divide a 4, entonces $(4,4) \in \mathscr{R}$.
- 4 divide a 12, entonces $(4,12) \in \mathscr{R}$.
- 5 divide a 5, entonces $(5,5) \in \mathscr{R}$.
- 5 divide a 10, entonces $(5,10) \in \mathscr{R}$.
- 6 divide a 6, entonces $(6,6) \in \mathscr{R}$.
- 6 divide a 12, entonces $(6,12) \in \mathscr{R}$.
- 10 divide a 10, entonces $(10,10) \in \mathscr{R}$.
- 12 divide a 12, entonces $(12,12) \in \mathscr{R}$.

Luego,

$$\begin{aligned}\mathscr{R} = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,10),(1,12)\\ &(2,2),(2,4),(2,6),(2,10),(2,12),(3,3),(3,6),(3,12)\\ &(4,4),(4,12),(5,5),(5,10),(6,6),(6,12),(10,10),(12,12)\}\end{aligned}$$

c) $\mathscr{R} = \{(X,Y) \in \mathscr{P}(\{a,b,c\}) \times \mathscr{P}(\{a,b,c\}) : \quad X \subseteq Y\}$

Solución. Vimos, en el ejercicio 3, que el conjunto de partes $\mathscr{P}(\{a,b,c\})$ es

$$\mathscr{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Entre los elementos de $\mathscr{P}(\{a,b,c\})$ tenemos que ver las relaciones de inclusión entre ellos, para determinar qué pares pertenecen a $\mathscr{R}$:

- $\emptyset \subseteq \emptyset$, entonces $(\emptyset, \emptyset) \in \mathscr{R}$
- $\emptyset \subseteq \{a\}$, entonces $(\emptyset, \{a\}) \in \mathscr{R}$
- $\emptyset \subseteq \{b\}$, entonces $(\emptyset, \{b\}) \in \mathscr{R}$
- $\emptyset \subseteq \{c\}$, entonces $(\emptyset, \{c\}) \in \mathscr{R}$
- $\emptyset \subseteq \{a,b\}$, entonces $(\emptyset, \{a,b\}) \in \mathscr{R}$
- $\emptyset \subseteq \{a,c\}$, entonces $(\emptyset, \{a,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\emptyset \subseteq \{b,c\}$, entonces $(\emptyset, \{b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\emptyset \subseteq \{a,b,c\}$, entonces $(\emptyset, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$

- $\{a\} \subseteq \{a\}$, entonces $(\{a\}, \{a\}) \in \mathscr{R}$
- $\{a\} \subseteq \{a,b\}$, entonces $(\{a\}, \{a,b\}) \in \mathscr{R}$
- $\{a\} \subseteq \{a,c\}$, entonces $(\{a\}, \{a,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{a\} \subseteq \{a,b,c\}$, entonces $(\{a\}, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{b\} \subseteq \{b\}$, entonces $(\{b\}, \{b\}) \in \mathscr{R}$
- $\{b\} \subseteq \{a,b\}$, entonces $(\{b\}, \{a,b\}) \in \mathscr{R}$
- $\{b\} \subseteq \{b,c\}$, entonces $(\{b\}, \{b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{b\} \subseteq \{a,b,c\}$, entonces $(\{b\}, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{c\} \subseteq \{c\}$, entonces $(\{c\}, \{c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{c\} \subseteq \{a,c\}$, entonces $(\{c\}, \{a,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{c\} \subseteq \{b,c\}$, entonces $(\{c\}, \{b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{c\} \subseteq \{a,b,c\}$, entonces $(\{c\}, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{a,b\} \subseteq \{a,b\}$, entonces $(\{a,b\}, \{a,b\}) \in \mathscr{R}$
- $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$, entonces $(\{a,b\}, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{a,c\} \subseteq \{a,c\}$, entonces $(\{a,c\}, \{a,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{a,c\} \subseteq \{a,b,c\}$, entonces $(\{a,c\}, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{b,c\} \subseteq \{b,c\}$, entonces $(\{b,c\}, \{b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{b,c\} \subseteq \{a,b,c\}$, entonces $(\{b,c\}, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$
- $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c\}$, entonces $(\{a,b,c\}, \{a,b,c\}) \in \mathscr{R}$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathscr{R} = \{&(\varnothing,\varnothing), (\varnothing,\{a\}), (\varnothing,\{b\}), (\varnothing,\{c\}), (\varnothing,\{a,b\}),\\
&(\varnothing,\{a,c\}), (\varnothing,\{b,c\}), (\varnothing,\{a,b,c\}),\\
&(\{a\},\{a\}), (\{a\},\{a,b\}), (\{a\},\{a,c\}), (\{a\},\{a,b,c\}),\\
&(\{b\},\{b\}), (\{b\},\{a,b\}), (\{b\},\{b,c\}), (\{b\},\{a,b,c\}),\\
&(\{c\},\{c\}), (\{c\},\{a,c\}), (\{c\},\{b,c\}), (\{c\},\{a,b,c\}),\\
&(\{a,b\},\{a,b\}), (\{a,b\},\{a,b,c\}),\\
&(\{a,c\},\{a,c\}), (\{a,c\},\{a,b,c\}),\\
&(\{b,c\},\{b,c\}), (\{b,c\},\{a,b,c\}), (\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}
\end{aligned}$$

6. a) Encontrar la relación inversa de cada una de las relaciones de los ejercicios 4 y 5.

Solución. Recordemos que si $\mathscr{R}$ es una relación, entonces un par $(x,y) \in \mathscr{R}^{-1}$ si y sólo si $(y,x) \in \mathscr{R}$. Usando esta definición, veamos las relaciones inversas de las definidas en los ejercicios 4 y 5.

2

4.a) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in [-2,3] \times [0,7] : \quad x^2 = y\}$.
Sea $(x,y) \in \mathscr{R}_1^{-1}$, entonces $(y,x) \in \mathscr{R}_1$; es decir, $y^2 = x$. Luego,

$$\mathscr{R}_1^{-1} = \{(x,y) \in [0,7] \times [-2,3] : y^2 = x\}$$

4.b) $\mathscr{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \quad |x| + |y| \leq 1\}$.
Sea $(x,y) \in \mathscr{R}_2^{-1}$, entonces $(y,x) \in \mathscr{R}_2$; es decir, $|y| + |x| \leq 1$. Luego,

$$\mathscr{R}_2^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| + |x| \leq 1\}$$

Notar que como la suma es conmutatitva, se tiene que $|y| + |x| = |x| + |y|$, de manera que $\mathscr{R}_2 = \mathscr{R}_2^{-1}$.
5.a) $\mathscr{R} = \{(x,y) \in A \times A : \quad x \leq y\}$ donde $A = \{1,2,3,6,7\}$.
Obtuvimos que

$$\begin{aligned}\mathscr{R} = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,6),(1,7),(2,2),(2,3),(2,6),(2,7)\\ &(3,3),(3,6),(3,7),(6,6),(6,7),(7,7)\}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{-1} = \{&(1,1),(2,1),(3,1),(6,1),(7,1),(2,2),(3,2),(6,2),(7,2)\\ &(3,3),(6,3),(7,3),(6,6),(7,6),(7,7)\}\end{aligned}$$

Podemos también hacer la descripción de $\mathscr{R}^{-1}$ por comprensión:
Si $(x,y) \in \mathscr{R}^{-1}$, entonces $(y,x) \in \mathscr{R}$; es decir $y \geq x$. Por lo tanto,

$$\mathscr{R}^{-1} = \{(x,y) \in A \times A : \quad y \leq x\} \text{ donde } A = \{1,2,3,6,7\}$$

5.b) $\mathscr{R} = \{(x,y) \in A \times A : \quad x \text{ divide a } y\}$ donde
$A = \{1,2,3,4,5,6,10,12\}$.
Vimos que

$$\begin{aligned}\mathscr{R} = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,10),(1,12)\\ &(2,2),(2,4),(2,6),(2,10),(2,12),(3,3),(3,6),(3,12)\\ &(4,4),(4,12),(5,5),(5,10),(6,6),(6,12),(10,10),(12,12)\}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{-1} = \{&(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(10,1),(12,1)\\ &(2,2),(4,2),(6,2),(10,2),(12,2),(3,3),(6,3),(12,3)\\ &(4,4),(12,4),(5,5),(10,5),(6,6),(12,6),(10,10),(12,12)\}\end{aligned}$$

La descripción de $\mathscr{R}^{-1}$ por comprensión se obtiene de lo siguiente:
Si $(x,y) \in \mathscr{R}^{-1}$, entonces $(y,x) \in \mathscr{R}$; es decir, y divide a x. Por lo tanto,

$\mathscr{R}^{-1} = \{(x,y) \in A \times A : \quad y \text{ divide a } x\}$ donde $A = \{1,2,3,4,5,6,10,12\}$

5.c) $\mathscr{R} = \{(X,Y) \in \mathscr{P}(\{a,b,c\}) \times \mathscr{P}(\{a,b,c\}) : \quad X \subseteq Y\}$
Vimos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{R} = \{&(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{a\}),(\emptyset,\{b\}),(\emptyset,\{c\}),(\emptyset,\{a,b\}),\\
&(\emptyset,\{a,c\}),(\emptyset,\{b,c\}),(\emptyset,\{a,b,c\}),\\
&(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a,b\}),(\{a\},\{a,c\}),(\{a\},\{a,b,c\}),\\
&(\{b\},\{b\}),(\{b\},\{a,b\}),(\{b\},\{b,c\}),(\{b\},\{a,b,c\}),\\
&(\{c\},\{c\}),(\{c\},\{a,c\}),(\{c\},\{b,c\}),(\{c\},\{a,b,c\}),\\
&(\{a,b\},\{a,b\}),(\{a,b\},\{a,b,c\}),\\
&(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,c\},\{a,b,c\}),\\
&(\{b,c\},\{b,c\}),(\{b,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}^{-1} = \{&(\emptyset,\emptyset),(\{a\},\emptyset),(\{b\},\emptyset),(\{c\},\emptyset),(\{a,b\},\emptyset),\\
&(\{a,c\},\emptyset),(\{b,c\},\emptyset),(\{a,b,c\},\emptyset),\\
&(\{a\},\{a\}),(\{a,b\},\{a\}),(\{a,c\},\{a\}),(\{a,b,c\},\{a\}),\\
&(\{b\},\{b\}),(\{a,b\},\{b\}),(\{b,c\},\{b\}),(\{a,b,c\},\{b\}),\\
&(\{c\},\{c\}),(\{a,c\},\{c\}),(\{b,c\},\{c\}),(\{a,b,c\},\{c\}),\\
&(\{a,b\},\{a,b\}),(\{a,b,c\},\{a,b\}),\\
&(\{a,c\},\{a,c\}),(\{a,b,c\},\{a,c\}),\\
&(\{b,c\},\{b,c\}),(\{a,b,c\},\{b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\})\}
\end{aligned}$$

La descripción por comprensión de esta relación es:

$$\mathscr{R}^{-1} = \{(X,Y) \in \mathscr{P}(\{a,b,c\}) \times \mathscr{P}(\{a,b,c\}) : \quad Y \subseteq X\}$$

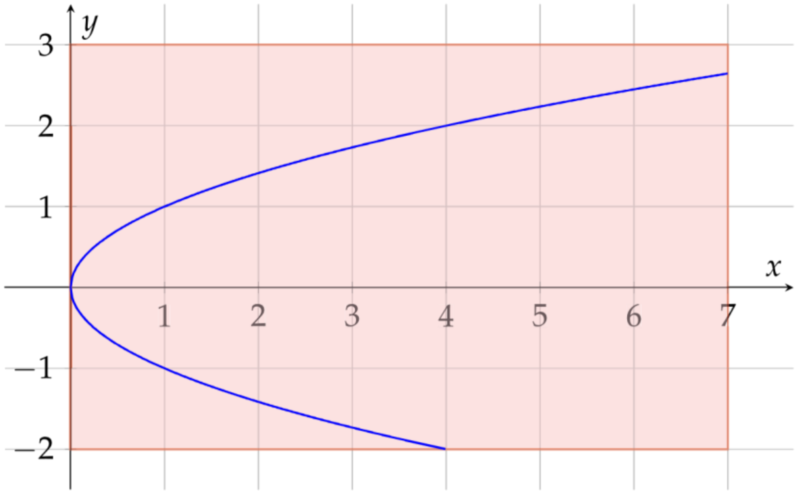
b) Hacer el gráfico de las relaciones inversas de las dadas en el ejercicio 4, y el grafo de las inversas de las relaciones consideradas en el ejercicio 5.

Solución. 4.a) $\mathscr{R}_1^{-1} = \{(x,y) \in [0,7] \times [-2,3] : \quad y^2 = x\}$

4

1

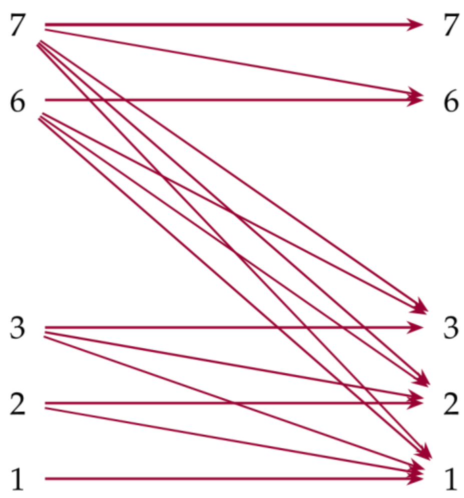
Solución.



4.b) Dado que $\mathscr{R}_2^{-1} = \mathscr{R}_2$, el gráfico es el mismo.

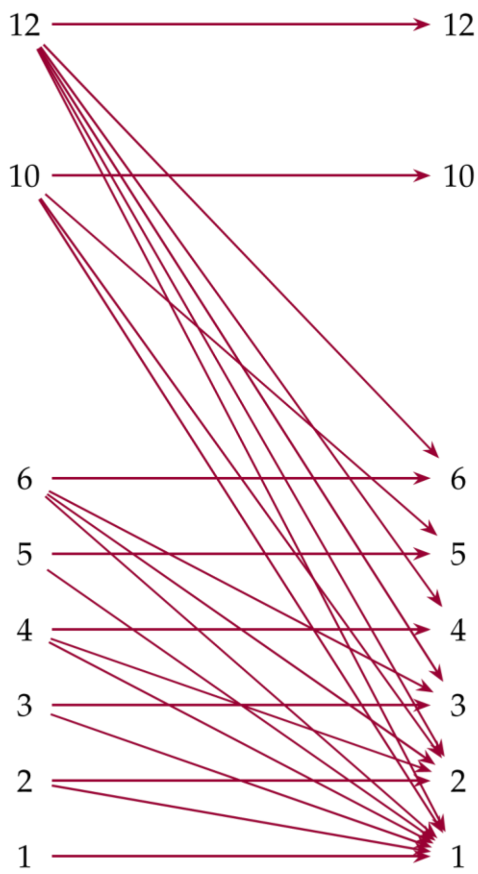
5.a)

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{-1} = \{&(1,1),(2,1),(3,1),(6,1),(7,1),(2,2),(3,2),(6,2),(7,2)\\ &(3,3),(6,3),(7,3),(6,6),(7,6),(7,7)\}\end{aligned}$$



5.b)

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{-1} = \{&(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(10,1),(12,1)\\ &(2,2),(4,2),(6,2),(10,2),(12,2),(3,3),(6,3),(12,3)\\ &(4,4),(12,4),(5,5),(10,5),(6,6),(12,6),(10,10),(12,12)\}\end{aligned}$$



7. Hallar $\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2$ en los siguientes casos.

a) $\mathscr{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad x = y\}$
$\mathscr{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad y = x + 2\}$

Solución. Empecemos encontrando $\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$. Si $(x, z) \in \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$, entonces existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $(y, z) \in \mathscr{R}_2$ y $(x, y) \in \mathscr{R}_1$.
Ahora bien, por la definición de $\mathscr{R}_2$, si $(y, z) \in \mathscr{R}_2$, debe suceder que

$$z = y + 2 \tag{1}$$

Por otro lado, si $(x, y) \in \mathscr{R}_1$, entonces

$$x = y \tag{2}$$

Reemplazando la expresión de la variable y de la ecuación (2) en la ecuación (1), obtenemos:

$$z = x + 2$$

6

Por lo tanto,

$$\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1 = \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : z = x + 2\}$$

b) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad y = x^2 + 1\}$
$\mathscr{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad y = 3x + 2\}$

c) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \quad y = 2x - 1\}$
$\mathscr{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \quad y = 3x^2\}$

d) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad x < 6, y = 2x + 1\}$
$\mathscr{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad x > 10, y = x - 1\}$

b) $R_2 \circ R_1$

Si $(x; z) \in R_2 \circ R_1$, entonces existe $y \in \mathbb{N}$, tal que $(y; z) \in R_2$ y $(x; y) \in R_1$. Por la definición de R_2, si $(y; z) \in R_2$ debe suceder:

$$z = 3y + 2$$

(1)

Por otro lado, si $(x; y) \in R_1$, entonces:

$$y = x^2 + 1$$

(2)

Reemplazando (2) en (1) obtenemos:

$$z = 3(x^2 + 1) + 2$$

$$z = 3x^2 + 3 + 2$$

$$z = 3x^2 + 5$$

$$R_2 \circ R_1 = \{(x; z) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: z = 3x^2 + 5\}$$

$$R_1 \circ R_2$$

Si $(x; z) \in R_1 \circ R_2$, entonces existe $y \in \mathbb{N}$, tal que $(y; z) \in R_1$ y $(x; y) \in R_2$. Por la definición de R_2, si $(y; z) \in R_1$ debe suceder:

$$z = x^2 + 1$$

(1)

Por otro lado si $(x;y) \in R_2$, entonces:

$$y = 3x + 2$$

(2)

Reemplazando (2) en (1) obtenemos:

$$z = (3x + 2)^2 + 1$$

$$z = 9x^2 + 12x + 4 + 1$$

$$z = 9x^2 + 12x + 5$$

$$R_2 \circ R_1 = \{(x;z) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: z = 9x^2 + 12x + 5\}$$

c) $R_2 \circ R_1$

Si $(x;z) \in R_2 \circ R_1$, entonces existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $(y;z) \in R_2$ y $(x;y) \in R_1$. Por la definición de R_2, si $(y;z) \in R_2$ debe suceder:

$$z = 3y^2$$

(1)

Por otro lado si $(x;y) \in R_1$, entonces:

$$y = 2x - 1$$

(2)

Reemplazando (2) en (1) obtenemos:

$$z = 3(2x - 1)^2$$

$$z = 3(4x^2 - 4x + 1)$$

$$z = 12x^2 - 12x + 3$$

$$R_2 \circ R_1 = \{(x;z) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}: z = 12x^2 - 12x + 3\}$$

$R_1 \circ R_2$

Si $(x;z) \in R_1 \circ R_2$, entonces existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $(y;z) \in R_1$ y $(x;y) \in R_2$. Por la definición de R_2, si $(y;z) \in R_1$ debe suceder:

$$z = 2y - 1$$

(1)

Por otro lado, si $(x;y) \in R_2$, entonces:

$$y = 3x^2$$

(2)

Reemplazando (2) en (1) obtenemos:

$$z = 2.(3x^2) - 1$$

$$z = 6x^2 - 1$$

$$R_2 \circ R_1 = \{(x; z) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}: z = 6x^2 - 1\}$$

d) Para la relación $R_1 = \{(x; y) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: x < 6, y = 2x + 1\}$ podemos definirla por extensión de acuerdo a los valores que puede tomar x, estos son 1, 2, 3, 4 y 5

Para $x = 1$ se cumple que $y = 2.1 + 1 = 3$ formando el par $(1; 3)$

Para $x = 2$ se cumple que $y = 2.2 + 1 = 5$ formando el par $(2; 5)$

Para $x = 3$ se cumple que $y = 2.3 + 1 = 7$ formando el par $(3; 7)$

Para $x = 4$ se cumple que $y = 2.4 + 1 = 9$ formando el par $(4; 9)$

Para $x = 5$ se cumple que $y = 2.5 + 1 = 11$ formando el par $(5; 11)$

$$R_1 = \{(1; 3), (2; 5), (3; 7), (4; 9), (5; 11)\}$$

Para la relación $R_2 = \{(x; y) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}: x > 10, y = x - 1\}$, no podremos escribir todos los pares que son sus elementos pero analizamos algunos:

Para $x = 11$ se cumple que $y = 11 - 1 = 10$ formando el par $(11; 10)$

Para $x = 12$ se cumple que $y = 12 - 1 = 11$ formando el par $(12; 11)$

Para $x = 13$ se cumple que $y = 13 - 1 = 12$ formando el par $(13; 12)$

Como buscamos $R_2 \circ R_1$, necesitamos todos los pares en los cuales la imagen de R_1 coincida con el dominio de R_2, eso ocurre solamente con el par $(5; 11) \in R_1$ y el par $(11; 10) \in R_2$, entonces:

$$R_2 \circ R_1 = \{(5; 10)\}$$

Para buscar $R_1 \circ R_2$, necesitamos todos los pares en los cuales la imagen de R_2 coincida con el dominio de R_1, en este caso el número que máximo que podemos encontrar en el dominio de R_1 es 5, y la mínima imagen que obtenemos en R_2 es 10, no obtendremos ningún par que cumpla con la condición, por lo tanto:

$$R_1 \circ R_2 = \emptyset$$