Viernes 22/5

MATRICES

elementos

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Filas}$$

Columnas

a_{ij} → columna

i → Fila

Dimensión → 3×3

$m \times n$ → columnas

m → Filas

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -4 & \boxed{-3} & -2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Posición 12

Fila

columna.

Clasificación de matrices

MATRIZ NULA:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todos sus elementos son ceros

MATRIZ FILA $\longrightarrow$ Tiene 1 sola fila

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$$

MATRIZ COLUMNA $\rightarrow$ Tiene 1 sola columna

$$C = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

MATRIZ CUADRADAS $\longrightarrow$ Misma cantidad de filas que de columnas

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a_{11}

a_{22}

$\downarrow$

Diagonal Principal

Diagonal Secundaria

$A_{2\times 2}$

$-7 \rightarrow$ Posición Fila 1 Columna

$4 \rightarrow$ Posición Fila 2 columna 1

$$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} & 5 \\ 1 & 0 & 8 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrices Triangulares

→ Triangular superior

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

→ Triangular inferior

$$I = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal → Tiene los elementos por encima y por debajo de la diagonal principal ceros

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

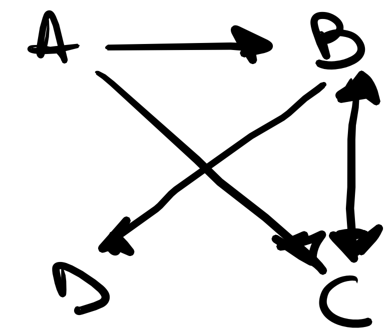
Matriz Identidad → Los elementos de la diagonal principal son 1
(es una matriz cuadrada)

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Diagonal Principal

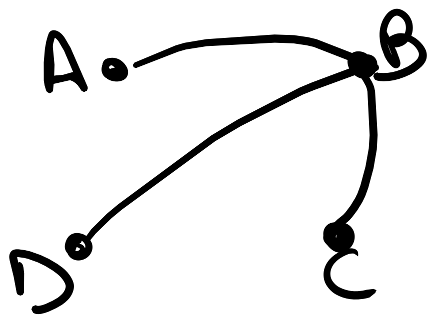
Elementos diagonal principal → a_{11} a_{22} a_{33}

GRAFOS → Dirigido



↓

Simples



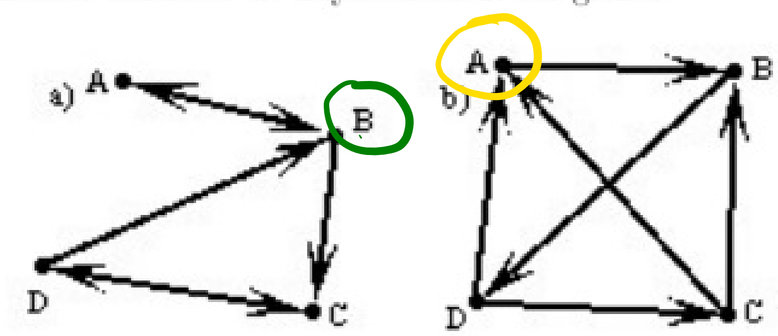
Matriz de adyacencia

Si hay un punto va desde la fila i hasta la columna j, entonces usamos 1

Si no está conectado utilizamos 0.

Ejercicio

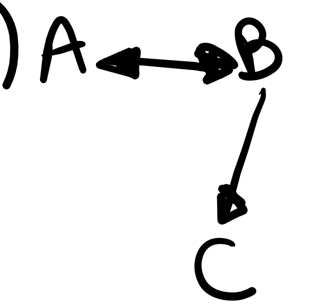
1) Escribe las correspondientes matrices de adyacencia de los grafos:



2) Dibuja los grafos dirigidos que correspondan a las matrices de adyacencia:

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & & & \\ B & & & \\ C & & & \end{array}\quad \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} A\;\;B\;\;C \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} A\;\;B\;\;C\;\;D \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

2) a)



1) a)

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} A\;\;B\;\;C\;\;D \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} A\;\;B\;\;C\;\;D \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

Operaciones con matrices

Suma y resta → Las matrices deben tener igual dimensión entre ellas

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

igual dimensión

$$\underset{2\times 3}{B} = \begin{pmatrix} \boxed{7} & 8 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2+7 & 5+8 & 1+1 \\ -3+5 & 4+0 & 0+4 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \underset{2\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$$

$5-(-10)$

$-1-(-9)$

$-1+9$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1/2 & 15 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

Propiedades (suma)

1) Conmutativa $A + B = B + A$

2) Asociativa $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) Elemento Neutro : Matriz Nula

4) Opuesto de A $\longrightarrow -A$

$$\begin{pmatrix} -1-2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

2. Calcula x, y, z en la suma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-\cancel{y}+\cancel{y} & -1+0 & 2+z \\ 1-z & y+2 & -x+3 \\ 0-2 & z+3 & 2+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{x} & -1 & 2+z \\ 1-z & y+2 & -x+3 \\ -2 & z+3 & 2+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -1$$

$$2+z = 3 \qquad z = 3-2 \qquad z = 1$$

$$y+2 = 4 \qquad y = 4-2 \qquad y = 2$$

$$\begin{pmatrix} -1-2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

2. Calcula x, y, z en la suma:

$$\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = -1$

$y = 2$

$z = 1$

verificación

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{-(-1)}_{1}$

Ejercicios:

1. Las exportaciones, en millones de euros, de 3 países A, B, C a otros tres X, Y, Z, en los años 2000 y 2001 vienen dadas por las matrices:

$$A_{2000} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 11 & 6'7 & 0'5 \\ 14'5 & 10 & 1'2 \\ 20'9 & 3'2 & 2'3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_{2001} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 13'3 & 7 & 1 \\ 15'7 & 11'1 & 3'2 \\ 21 & 0'2 & 4'3 \end{pmatrix} \end{array}$$

13,3

Calcula y expresa en forma de matriz el total de exportaciones para el conjunto de los dos años.
¿Cuántos millones ha exportado el país B al Z en total? 1,2 + 3,2 = 4,4
Calcula el incremento de las exportaciones del año 2000 al 2001 con los datos del ejemplo anterior.

2. Calcula x, y, z en la suma:

$$\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcula a, b, c para que se cumpla la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 3-a & b & -2 \\ 4 & -c+1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a+b & 4 \\ 1-c & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$1-(-2)$

$-3Y-(-2Y)$

$-3Y+2Y=\underbrace{-1Y}$

E_1 $\quad a)\begin{cases} 2X-3Y=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}\\ 1X-Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}\end{cases}$

$E_2 \longrightarrow$

Método de reducción

$E_1 \quad 2X-3Y=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

$2E_2 \quad 2(1X-1Y)=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

un escalar por una matriz

$2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 6 & 12\end{pmatrix}$

$E_1 \quad 2X-3Y=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

$-$

$E_2 \quad 2X-2Y=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 6 & 12\end{pmatrix}$

$-1Y=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & -10\end{pmatrix}$

$$\boxed{Y=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}}$$

Reemplazar

$X-Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

$X-\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 5 & 16\end{pmatrix}}$ X

$3 - \frac{3}{2} = \frac{6-3}{2} = 3/2$

$$b)\ \begin{cases} X+Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X-Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Reemplazar

$$X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} + \quad X + Y &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline 2X &= \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de un escalar por una matriz

1) $K \cdot (A+B) = KA + KB$ Distributiva

2) $(K+d)\,A = KA + dA$

3) $K(d \cdot A) = (Kd) \cdot A$ Asociativa

4) Elemento Neutro $1A = A$

Matriz Traspuesta

$A \longrightarrow A^t$ es la que se obtiene al intercambiar filas por columnas

$$A = \begin{array}{c} \text{Fila 1} \\ \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3} \\ \boxed{-5 \quad 8} \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow A^t = \begin{array}{c} \text{columna 1} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -5 \\ 8 \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 5 \quad -4} \\ \boxed{0 \quad 7 \quad 11} \end{pmatrix} \qquad A^t_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 7 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^t + B$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

No tiene la misma dimensión que B

$$A^t_{3\times 2} \quad B_{2\times 3}$$

No se pueden

SUMAR

Propiedades

1) $(A^t)^t = A \to$ Traspuesta de la traspuesta

2) $(A+B)^t = A^t + B^t$

3) $(K \cdot A)^t = \underbrace{K}_{\text{escalar}} \cdot A^t$

$A^t = A \to$ Matriz simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{7} \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$$