Matemática 1
Práctica 5 - Matrices

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ Realizar las siguientes operaciones.

a) $3A$

b) $2C - 5A$

c) $A + B + C$

d) $7C - B + 2A$

e) $A + B$

f) $0B$ (0 es el escalar cero)

g) $C - A - B$

h) $A - C$

i) $-7A + 3B$

j) $2A - 3B + 4C$

2. Encontrar una matriz D de manera que $2A + B - D$ sea la matriz cero de 3×2.

3. Obtener una matriz E de manera que $A + 2B - 3C + E$ sea la matriz cero de 3×2.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

I) Efectuar las siguientes operaciones.

a) $A - 2B$

b) $3A - C$

c) $A + B + C$

d) $2A - B + 2C$

e) $C - A - B$

f) $4C - 2B + 3A$

II) Hallar la matriz D de manera que $A + B + C + D$ sea la matriz nula de 3×3.

III) Encontrar una matriz E de manera que $3C - 2B + 8A - 4E$ sea la matriz cero de 3×3.

5. Efectuar las siguientes operaciones.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^2, A^3, A^4 y A^5.

7. Encontrar las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ X - Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

8. Calcular X tal que $X - B^2 = AB$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Determinar los valores de m para los cuales $X = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ verifique

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$$

10. Encontrar las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema:

$$\begin{cases} X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ 2X - Y = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

11. Calcular X tal que $AX - X = A^2$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

12. Determinar los valores de p y q para los cuales la matriz

$$X = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{bmatrix}$$

satisface la ecuación $X^2 - 2I = 0$.

13. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcular X tal que $XA + A^T = 2I$.

14. Determinar las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema:

$$\begin{cases} X + Y &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 2X - Y &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

15. Una matriz A de $n \times n$ se dice nilpotente si existe un numero entero $k \geq 1$ tal que $A^k = 0$. Mostrar que la siguiente matriz es nilpotente y encontrar el entero k más pequeño para el cual $A^k = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

16. Determinar para qué valores de α, la matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & -3 \\ 4 & 1-\alpha \end{bmatrix}$ no es inversible.

17. Encontrar, si existe, la inversa de la matriz A.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$

18. Mostrar que si A, B y C son matrices inversibles de $n \times n$ entonces ABC es inversible y $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

19. Mostrar que la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ es igual a su propia inversa.