

Lógica proposicional

Proposiciones: La lógica proposicional analiza la verdad o falsedad de una proposición, o combina proposiciones utilizando conectores lógicos para analizar esa verdad o falsedad.

Conectores lógicos

Negación ($\sim p$): Cambia el valor de verdad de p

Conjunción ($p \wedge q$): Es verdadera si p y q son verdaderas.

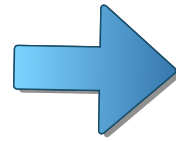
Disyunción ($p \vee q$): Es verdadera si al menos una de p o q es verdadera.

Disyunción lógica excluyente ($p \veebar q$): Es verdadera cuando solamente una de las dos es verdadera, no pueden ser verdaderas ambas.

Implicación ($p \Rightarrow q$): Es falsa solo cuando p es verdadera y q es falsa.

Doble implicación ($p \Leftrightarrow q$): Es verdadera si p y q tienen el mismo valor de verdad.

Tablas de verdad



Sirven para comprobar el valor de verdad que pueden tomar las proposiciones

La negación se relaciona con el complemento de conjuntos.

Ejempl

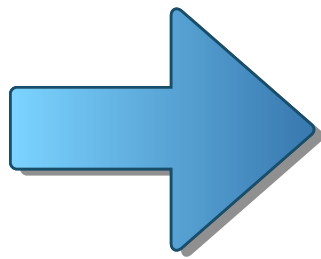
Analizando la negación, si nuestra proposición es:

p : Hoy es un día soleado

$\sim p$: Hoy NO es un día soleado

p	$\sim p$
V	F
F	V

Proposiciones compuestas



Son proposiciones se forman a partir de proposiciones simples.

Ejemplo:

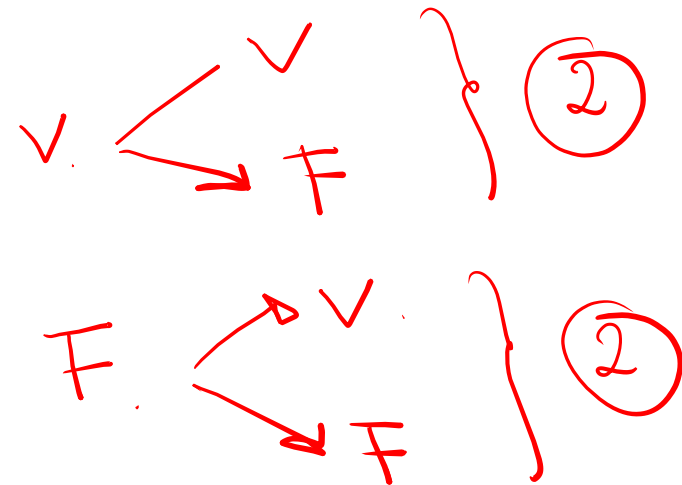
Proposición compuesta: "Regalo los libros viejos o que no me sirven"

La podemos separar en dos proposiciones simples.

p : Regalar los libros viejos

q : Regalar los libros que no me sirven

Como el operador lógico es (\vee) "o" analizamos las diferentes posibilidades de verdad que tienen, en una tabla:



p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esa "o" indica que se debe cumplir una de las dos proposiciones (o ambas) para que la disyunción sea VERDADERA

Unión
(se relaciona con la unión de conjuntos)

$2 \rightarrow$ Cantidad de proposiciones
 $2^2 = 4 \rightarrow$ Cantidad de filas de la tabla

Conjunción

Ejemplo:

Regalo los libros viejos \wedge que no me sirven

p : regalo los libros viejos

q : regalo los libros que no me sirven

La tabla quedaría de la siguiente manera:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Indica que
deben cumplirse

(ser V) ambas

Proposiciones para

que la conjunción sea "V"

Se relaciona
con la
intersección de
conjuntos

\uparrow

\wedge

\wedge

Disyunción lógica excluyente →

Para obtener un valor de "V"
Solamente 1 de las proposiciones
debe ser V.

Por ejemplo si tuviéramos el enunciado "Hoy está totalmente despejado o está nublado"

p : Está totalmente despejado

q : Está nublado

No podrían pasar ambas cosas en el mismo momento.

Se relaciona
con la

→ Diferencia
Simétrica.
de conjuntos.

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicación o condicional

→ La primera proposición condicional a la segunda, este caso solamente es "F", cuando es "V" la primera proposición y "F" la segunda.

Ejemplo

"Si apruebo el examen te presto el apunte"

p : apruebo el examen

q : te presto el examen

Obtendremos un valor de verdad cuando se cumpla con lo prometido.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	✓
V	F	✗
F	V	✓
F	F	✓

Doble implicación

Para obtener un valor de " \vee " ambos lados de la implicación deben tener el mismo valor de verdad, esto quiere decir, ser ambos " \vee " o ambos " F ".

Ejemplo 12 es par si y solo si es divisible por 2

p : 12 es par

q : 12 es divisible por 2

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	\vee
V	F	F
F	V	F
F	F	\vee

→ ambos " \vee "

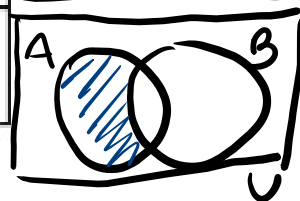
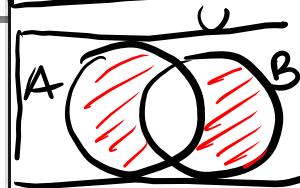
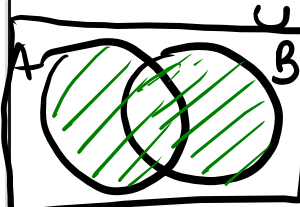
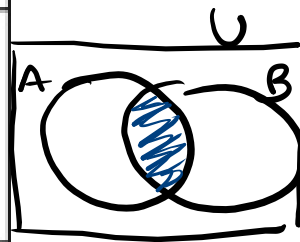
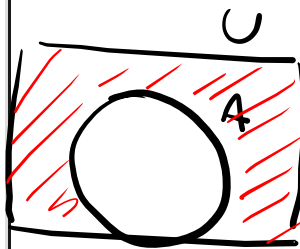
→ ambos " F "

Diferentes
maneras
de expresar
"complemento"

A'
 \bar{A}
 A^c

Relación entre operaciones entre conjuntos y operadores lógicos

Operación entre conjuntos	Significado	Conector lógico con el que se relaciona
Complemento de un conjunto $(A^c - \bar{A})$	Es todo lo que se encuentra en el conjunto universal sin contar a ese conjunto	Negación $\sim p$
Intersección $A \cap B$	Es lo que se encuentra en común entre dos o más conjuntos	Conjunción $p \wedge q$
Unión $A \cup B$	Es lo que se encuentra en alguno de los conjuntos involucrados en la unión, ya que al unirlos obtenemos todos los elementos de los conjuntos que se quieren unir.	Disyunción $p \vee q$
Diferencia simétrica $A \Delta B$	Es lo que se encuentra en uno u otro conjunto, pero no en ambos.	<u>Disyunción lógica excluyente</u> $p \vee q$
Diferencia $(A - B, A \setminus B)$	Es lo que se encuentra en el primer conjunto pero no en el segundo	$p \wedge \sim q$



La disyunción la podemos relacionar con la unión de conjuntos

Podemos armar una tabla de verdad

$$\text{Si } x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

¿x pertenece a A?

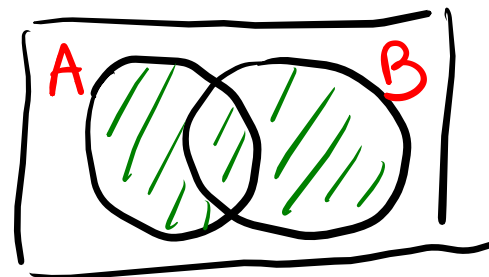
¿x pertenece a B?

¿x pertenece a $A \cup B$?

A	B	$A \cup B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Debe
Pertenecer
Por lo menos
a uno de
los conjuntos

2 \rightarrow conjuntos
= 4



Estas tablas de verdad sirven para poder verificar propiedades entre las operaciones entre conjuntos. Veamos el ejemplo 1.4:

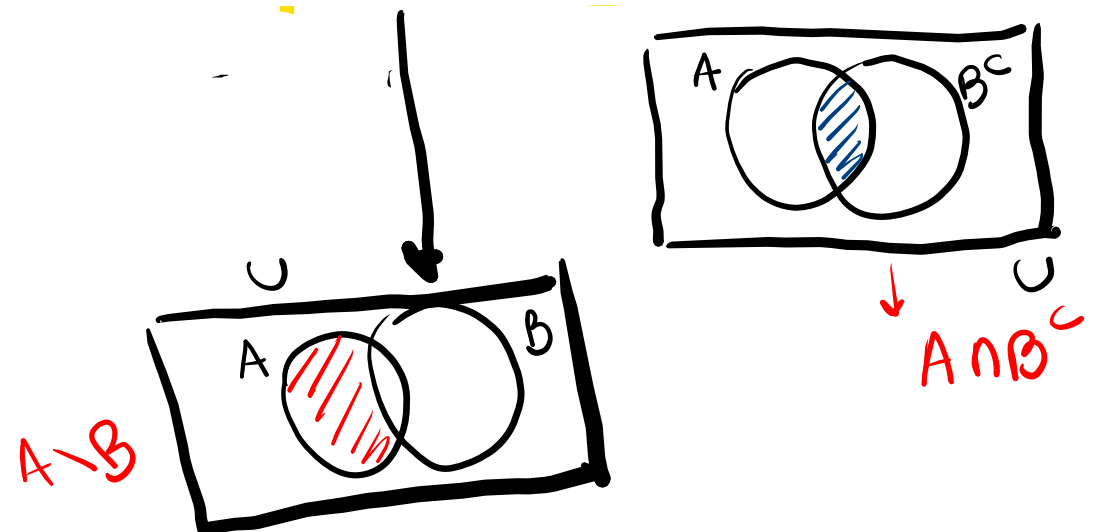
$A \setminus B = A \cap B^c$

Prestar atención a las columnas involucradas.

A	B	B^c	$A \setminus B$	$A \cap B^c$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F

$A \setminus B$ $A - B$

Formas de escribir la diferencia



- ∴ Las últimas dos columnas son iguales, por eso podemos decir que la igualdad se cumple.

Otro ejemplo, la siguiente es una de las leyes de De Morgan, para comprobar que se cumple podemos hacer su tabla de verdad.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

El complemento
tiene un valor
de verdad solo
el contrario
al original.

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Las columnas son iguales,
la ley se cumple.

1_a)

$$(A \Delta B) - C = (A - C) \Delta (B - C)$$

3 conjuntos
2 = 8
↓
Cantidad de filas necesarias para obtener todas las combinaciones de V, F entre los 3 conjuntos

A	B	C	$A \Delta B$	$(A \Delta B) - C$	$A - C$	$B - C$	$(A - C) \Delta (B - C)$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Se cumple la igualdad