



Universidad Tecnológica Nacional

Matemática 1

§ Práctica 2. Lógica

1. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial \mathcal{U} , utilizando tablas de verdad. Para las que no sean verdaderas, dar un contraejemplo.

a) $(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$

A	B	C	$A \triangle B$	$(A \triangle B) \setminus C$	$A \setminus C$	$B \setminus C$	$(A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Las columnas de $(A \triangle B) \setminus C$ y de $(A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$ coinciden, por lo que la igualdad es verdadera.

b) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$

A	B	C	$A \cap B$	$(A \cap B) \triangle C$	$A \triangle C$	$B \triangle C$	$(A \triangle C) \cap (B \triangle C)$
V	V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

Las columnas de $(A \cap B) \triangle C$ y de $(A \triangle C) \cap (B \triangle C)$ no coinciden, entonces la igualdad no es cierta.

Por ejemplo, si $A = \emptyset$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{2, 3\}$, tenemos que:

$$(A \cap B) \triangle C = \{2, 3\} \quad \text{y} \quad (A \triangle C) \cap (B \triangle C) = \{3\}.$$

c) $C \subseteq A \implies B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$

A	B	C	$(B \cap C)$	$A \triangle B$	$(A \triangle B)^c$
V	V	V	V	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

Por la hipótesis de que $C \subseteq A$, no puede pasar que un elemento x pertenezca a C y que no pertenezca a A . Por esto, excluimos las filas pintadas de rojo.

Ahora bien, para probar la inclusión $B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$, tenemos que ver que cada vez que un elemento $x \in B \cap C$, tiene que suceder que $x \in (A \triangle B)^c$. Que un elemento $x \in B \cap C$ solamente sucede en la primera fila (pintada de verde), y en esta misma fila se verifica que $x \in (A \triangle B)^c$. Por lo tanto, la inclusión es verdadera.

d) $A \triangle B = \emptyset \implies A = B$

A	B	$A \triangle B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Dado que la hipótesis nos dice que $A \triangle B = \emptyset$, no puede suceder que un elemento $x \in A \triangle B$. Es por esto, que excluimos las filas pintadas de rojo. En las demás filas, las columnas de A y B son iguales. Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

2. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial \mathcal{U} . Usando tablas de verdad, probar que

a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

A	B	C	$B \triangle C$	$A \cap (B \triangle C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \triangle (A \cap C)$
V	V	V	F	F	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

A	B	C	$B \setminus C$	$A \setminus (B \setminus C)$	$A \setminus B$	$A \cap C$	$(A \setminus B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

c) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

A	B	C	$A \triangle B$	$A \triangle C$	$B \triangle C$	$(A \triangle C) \cup (B \triangle C)$
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

Cada vez que un elemento $x \in A \triangle B$, se verifica que $x \in (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$. Es decir, cada vez que hay un 1 en la columna de $A \triangle B$, también hay un 1 en la columna de $(A \triangle C) \cup (B \triangle C)$. Por lo tanto, se verifica la inclusión.

d) $(A \cap C) \setminus B = (A \setminus B) \cap C$

A	B	C	$A \cap C$	$(A \cap C) \setminus B$	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \cap C$
1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

e) $A \subseteq B \implies A \triangle B = B \cap A^c$

A	B	$A \triangle B$	$(B \cap A^c)$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	0

Como $A \subseteq B$, excluimos el caso donde $x \in A$ y $x \notin B$ (la fila pintada de rojo). En las restantes filas, las columnas de $A \triangle B$ y $B \cap A^c$ son iguales. Por lo tanto, se verifica la igualdad de estos conjuntos bajo la hipótesis de que $A \subseteq B$.

f) $A \subseteq B \implies B^c \subseteq A^c$

A	B	A^c	B^c
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Excluimos la segunda fila porque no se verifica que $A \subseteq B$. En las restantes, tiene que suceder que cada vez que un elemento $x \in B^c$, se tiene que $x \in A^c$. Ahora bien, $x \in B^c$ únicamente en la cuarta fila, y en la misma se verifica también que $x \in A^c$. Por lo tanto, la inclusión $B^c \subseteq A^c$, es cierta bajo la hipótesis $A \subseteq B$.

g) $A \cap C = \emptyset \implies A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

A	B	C	$A \cap C$	$B \triangle C$	$A \cap (B \triangle C)$	$A \cap B$
1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0

h) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

A	B	$A \cap B$	$A \setminus B$	$A \setminus (A \setminus B)$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0

i) $A \cup B = (A \triangle B) \cup B$

A	B	$A \cup B$	$A \triangle B$	$(A \triangle B) \cup B$
1	1	1	0	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	0

j) $A \triangle B = (A \triangle C) \triangle (B \triangle C)$

A	B	C	$A \triangle B$	$A \triangle C$	$B \triangle C$	$(A \triangle C) \triangle (B \triangle C)$
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0

k) $A \setminus B = B \setminus A \iff A = B$

A	B	$A \setminus B$	$B \setminus A$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	0

En este caso, tenemos que probar una doble implicación. Esto es:

- Si $A \setminus B = B \setminus A$, entonces $A = B$
- Recíprocamente, si $A = B$, entonces $A \setminus B = B \setminus A$

Para la primera implicación: Suponiendo que $A \setminus B = B \setminus A$, entonces excluimos las filas 2 y 3, porque allí los valores de verdad de las columnas correspondientes son distintos. En las restantes filas, las columnas de A y B son iguales, por lo que $A = B$.

Para la segunda implicación: Suponiendo que $A = B$, excluimos las filas 2 y 3 porque tienen distintos valores de verdad. En las restantes filas, las columnas de $A \setminus B$ y $B \setminus A$ coinciden, por lo que se verifica la igualdad de estos conjuntos.

l) $(A \cup B) \Delta (A \cup C) \subseteq A \cup (B \Delta C)$

A	B	C	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \Delta (A \cup C)$	$B \Delta C$	$A \cup (B \Delta C)$
1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

m) $A \setminus (B \cup C) = A \setminus (B \cap C) \iff (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

A	B	C	$B \cup C$	$A \setminus (B \cup C)$	$(B \cap C)$	$A \setminus (B \cap C)$	$A \setminus B$	$A \setminus C$	$(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

3. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$$

$$(A \cap B) \times (A \cup B) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$$

4. Sean A, B y C conjuntos. Probar que

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

A	B	C	$(A \cup B) \times C$	$A \times C$	$B \times C$	$(A \times C) \cup (B \times C)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

A	B	C	$(A \cap B) \times C$	$A \times C$	$B \times C$	$(A \times C) \cap (B \times C)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

A	B	C	$(A \setminus B) \times C$	$A \times C$	$B \times C$	$(A \times C) \setminus (B \times C)$
1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

d) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

A	B	C	$(A \triangle B) \times C$	$A \times C$	$B \times C$	$(A \times C) \triangle (B \times C)$
1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0