Programación I

Matemática

Unidad 3: **RELACIONES BINARIAS- GRAFOS**

Clase 5:

CONCEPTOS BÁSICOS DE LAS RELACIONES

PRODUCTO CARTESIANO

RELACION BINARIA

REPRESENTACIÒN DE RELACIONES

Presentación

Veremos el concepto de relación y función. Trabajaremos en ejemplos básicos y sencillos de relaciones y funciones.

Objetivos

Que los participantes logren…

- Identificar los distintos tipos de relaciones.
- Identificar, definir y comparar relaciones y funciones
- Utilizar gráficas, tablas y conjuntos de pares ordenados para representar relaciones y funciones.

Bloques temáticos

- Definición - Tipos de Relaciones
- Operaciones entre relaciones
- Grafo de una aplicación. Tipos de aplicaciones

Relaciones

Una relación es un conjunto de pares ordenadas, formadas de la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos dados.

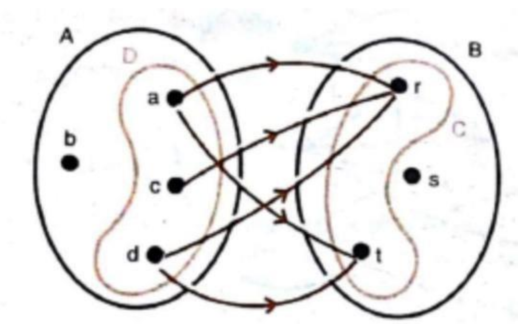
Sea un conjunto integrado por los nombres de mujer: $A = \{Ana, Fabiola, Tania\}$ y otro integrado por los apellidos: $B = \{Hernández, López, Pérez, Sánchez\}$.

Tomando el ejemplo anterior, algunas relaciones pueden ser:

$R_1: A \rightarrow B$, $R_1 = \{(Ana, Hernández), (Fabiola, López), (Fabiola, Pérez), (Tania, Sánchez)\}$

$R_2: A \rightarrow B$, $R_2 = \{(Ana, López), (Fabiola, Hernández), (Tania, Hernández), (Tania, López)\}$

Dominio y codominio de una relación



El diagrama representa la relación R_1 "vio la película" definida entre A y B.

$A = \{a; b; c; d\}$ →conjunto de personas

$B = \{r; s; t\}$ →conjunto de películas

Según el diagrama, la relación está formada por 5 pares (5 flechas)

$$R_1 = \{(a, r); (a, t); (c, r); (d, r); (d, t)\}$$

b no vio películas del conjunto B.

s no fue vista por ninguna persona del conjunto A.

Las flechas parten de A y llegan a B. A se llama **conjunto de partida** y B se llama **conjunto de llegada**. Observa que sólo algunos elementos de A están relacionados con algunos elementos de B.

***Definiciones**:*

1) El conjunto formado por los primeros elementos de cada par de la relación se llama **dominio** de la relación.
2) El conjunto formado por los segundos elementos de cada par de la relación se llama **codominio**
de la relación.

$D = Dm = \{a; b; c\}$ $\quad\quad$ $C = Codm = \{r; t\}$

En el diagrama, de cada punto del dominio sale por lo menos una flecha, y a cada punto del codominio llega por lo menos una flecha.

En el ejemplo dado, el dominio es un subconjunto de A, pero puede coincidir con él.

Expresamos:

$$Dm \subseteq \text{A y Codm} \subseteq \text{B}$$

Una relación es, pues, un conjunto de pares ordenados (x, y) que verifican una propiedad $P(x, y)$.

$$R = \{(x, y) \colon P(x, y)\}$$

Por ejemplo, si P = "es divisor de". Entonces

$$R = \{(x, y) \colon x \text{ "es divisor de" y}\}$$

$(3,12) \in R$ $\quad\quad$ $(5,12) \notin R$

Relación inversa

$$3 \underbrace{\text{"es divisor de"}}_{R} 12 \Leftrightarrow 12 \underbrace{\text{"es múltiplo de"}}_{R^{-1}} 3$$

La relación “es múltiplo de” se llama **inversa** de la relación “es divisor de” y se anota R^{-1}.

$$(3,12) \in R \Leftrightarrow (12,3) \in R^{-1}$$

Generalizando:

$$R^{-1} = \{(x, y) \colon (y, x) \in R\}$$

Relación complementaria

Dada una relación R de A en B queda determinada otra relación llamada relación complementaria o complemento de R formada por todos los pares ordenados que no pertenecen a R.

Se anota $\overline{R}$.

En símbolos:

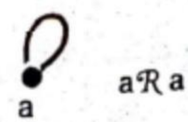
$$\overline{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$$

Por ejemplo, 3 no es divisor de 5.

$$(3,5) \notin R \Rightarrow (3,5) \in \overline{R}$$

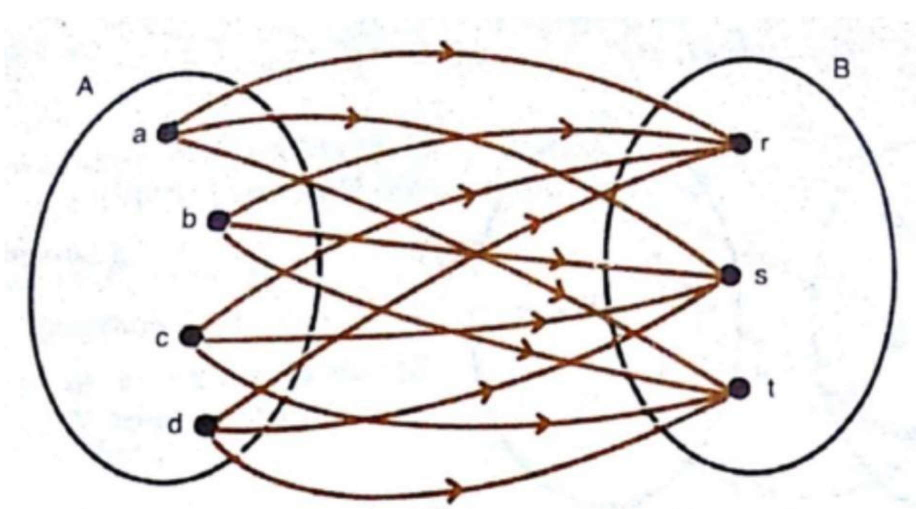
Representación en diagramas

Cada par de una relación se representa por una flecha y la relación está representada por el conjunto de flechas.



Si **a** está relacionado con **b** sale una flecha de **a** hacia **b**.

Si **a** está relacionado con sí mismo, sale una flecha de **a** y vuelve hacia **a**. Esta flecha se llama bucle o rulo.



Este conjunto se llama producto cartesiano de A por B y se anota:

$$A \times B = \{(a, r); (a, s); (a, t); (b, r); (b, s); (b, t); (c, r); (c, s); (c, t); (d, r); (d, s); (d, t)\}$$

Definición: Se llama producto cartesiano de un conjunto A por un conjunto B, al conjunto de todos los pares ordenados cuyo primer elemento pertenece a A y cuyo segundo elemento pertenece a B.

Si consideramos el producto $B \times A$, el primer elemento de cada par pertenece a B y el segundo elemento pertenece a A.

$$B \times A = \{(r, a); (r, b); (r, c); (r, d); (s, a); (s, b); (s, c); (s, d); (t, a); (t, b); (t, c); (t, d)\}$$

Como $(a, r) \neq (r, a)$ pues son pares ordenados, resulta que

$$A \times B \neq B \times A$$

En consecuencia,

El producto cartesiano no es conmutativo.

En particular, se pueden considerar los productos:

$$A \times A = A^2 \qquad \text{o} \qquad B \times B = B^2$$

Número de elementos del producto cartesiano

$$\left.\begin{array}{l} Si\ A\ tiene\ 4\ elementos \\ y\ B\ tiene\ 3\ elementos \end{array}\right\} A \times B\ tiene\ 12\ elementos\ (4 \times 3 = 12)$$

$A \times A\ tiene\ 16\ elementos$ (4 × 4 = 16)

$B \times B\ tiene\ 9\ elementos$ (3 × 3 = 9)

Ejercicios

Ejercicio 12. Escribe la inversa de cada una de las siguientes relaciones:

R_1: … *es el sucesor de* …

R_2: … *es sobrino de* …

R_3: … *admira a* …

R_4: … *es vecino de* …

R_5: … *es afluente de* …

R_6: … *es el complemento de* …

Ejercicio 13. Dada la relación $R = \{(a,b); (a,c); (b,b); (c,a); (c,c)\}$ definida en el conjunto $A = \{a, b, c\}$

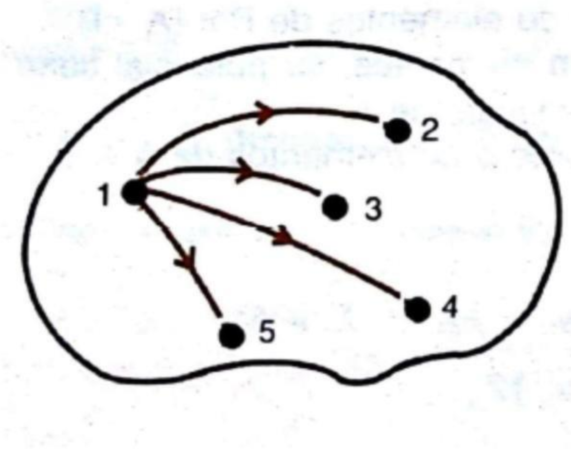
- **a)** Define por pares la relación inversa. {(b, a), (c, a), (b, b), (a, c), (c, c)}
- **b)** Define por pares la relación complementaria. {(a, a), (b, a), (b, c), (c, b)}
- **c)** Dada la relación R, ¿cómo calculas el número de elementos de R? Contando: 5

Ejercicio 14. Define por extensión el domino y el codominio de las relaciones R_1, R_2, y R_3 definidas en el conjunto $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

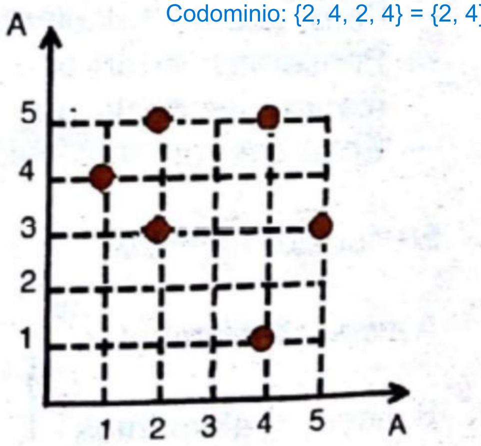
Dominio: los primeros
Codominio: los segundos

$$R_1 = \{(1,2); (1,4); (3,2); (3,4)\}$$

Dominio: {1, 1, 3, 3} = {1, 3}
Codominio: {2, 4, 2, 4} = {2, 4}



R_2



R_3

Ejercicio 15. Dadas las relaciones:

R_1: … *es afluente de* … y R_2: … *es premio Nobel de* …

Escribir tres pares que verifiquen cada relación y tres pares que verifiquen la relación complementaria.

Bibliografía utilizada

Álgebra I Armando Rojo Editorial El Ateneo