

# Programación I

# Matemática

Unidad 4

Clase 6:

**Leyes del algebra de Boole.**  
**Ley de la Identidad.**  
**Ley de la Negación.**  
**Ley de la Idempotencia.**



## Presentación

En esta clase aprenderemos a:

- Utilizar variables booleanas, que representan verdades como 1 (verdadero) y 0 (falso)
- Utilizar operadores lógicos como AND (conjunción), OR (disyunción) y NOT (negación)



## Objetivos

- Analizar y describir el funcionamiento de circuitos lógicos compuestos



## Bloques temáticos

- Concepto de estructura algebraica
- Representación – Diagrama de Hasse
- Tablas de Verdad

# Matemática 1

## Universidad Tecnológica Nacional

### Unidad N° 3

#### § 1. Álgebras de Boole

**1.1.** Un Algebra de Boole es una estructura algebraica formada por un conjunto  $B$ , con al menos dos elementos distintos (primer y último elementos), designados en forma general con los símbolos 0 y 1, dos operaciones binarias:  $\vee$  (denominada supremo) y  $\wedge$  (denominada ínfimo) y una operación unaria:  $'$  (denominada complemento), con las siguientes propiedades para elementos cualesquiera  $x, y, z$  en  $B$ :

$$(B1) \quad x \vee y = y \vee x \quad (\text{conmutatividad de } \vee).$$

$$(B2) \quad x \wedge y = y \wedge x \quad (\text{conmutatividad de } \wedge).$$

$$(B3) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (\text{distributividad de } \wedge \text{ con respecto a } \vee).$$

$$(B4) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad (\text{distributividad de } \vee \text{ con respecto a } \wedge).$$

$$(B5) \quad x \vee 0 = x \quad (0 \text{ elemento neutro de la operación } \vee).$$

$$(B6) \quad x \wedge 1 = x \quad (1 \text{ elemento neutro de la operación } \wedge).$$

$$(B7) \quad x \vee x' = 1$$

$$(B8) \quad x \wedge x' = 0$$

Un álgebra de Boole también se indica como  $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$  cuando sea necesario referirse a las operaciones y al primer y último elemento.

Otra notación: Se utiliza también el símbolo  $+$  para indicar el supremo  $\vee$  y el símbolo  $\cdot$  para indicar el ínfimo  $\wedge$ , aunque al igual que en la multiplicación usual en  $\mathbb{R}$  suele ponerse un elemento al lado del otro omitiendo el punto. Con esta notación los axiomas se transforman en:

$$(B1) \quad x + y = y + x$$

$$(B2) \quad xy = yx$$

$$(B3) \quad x(y + z) = xy + xz$$

$$(B4) \quad x + (yz) = (x + y)(x + z)$$

$$(B5) \quad x + 0 = x$$

$$(B6) \quad x1 = x$$

$$(B7) \quad x + x' = 1$$

$$(B8) \quad xx' = 0$$

Usaremos en adelante esta última notación cuando nos estemos refiriendo a elementos de un álgebra de Boole cualquiera.

También son válidas la asociatividad de  $+$  y de  $\cdot$ :

$$x + (x + z) = (x + y) + z$$

$$x(yz) = (xy)z$$

**1.2.** La siguiente proposición nos dice que el complemento de un elemento cualquiera de un álgebra, es único.

**Proposición.** Sea  $x \in B$ , si existe un elemento  $a \in B$  que cumple que  $xa = 0$  y  $x + a = 1$  entonces  $a = x'$ ; es decir, que  $a$  es el complemento de  $x$ .

Toda álgebra de Boole finita (es decir,  $B$  es un conjunto finito) admite una representación mediante un diagrama de Hasse y los elementos en el nivel inmediato superior al 0 se denominan átomos.

Un átomo es un elemento  $a$  del álgebra tal que para cualquier otro elemento  $b$  del álgebra se tiene que

$$ab = a \quad \text{o} \quad ab = 0$$

En general el diagrama de Hasse de un algebra  $B$  se construye ubicando en el nivel inferior al 0 y luego se ordenarán los elementos según las operaciones supremo e ínfimo del algebra correspondiente. El diagrama de Hasse es una representación gráfica de la relación entre elementos de un conjunto que le da un orden de acuerdo al criterio con el que se los relaciona.

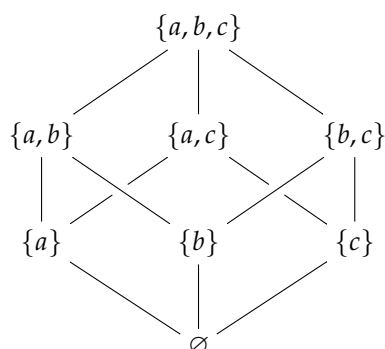
**1.3. Ejemplo.** Dado un conjunto  $H$ , el conjunto  $\mathcal{P}(H)$  con la unión como supremo, la intersección como ínfimo, el complemento para conjuntos, el vacío  $\emptyset$  como primer elemento y  $H$  como último elemento,  $\mathcal{H} = (\mathcal{P}(H), \cup, \cap, ^c, \emptyset, H)$  es un álgebra de Boole, usualmente llamada Álgebra de Partes de un conjunto.

Si el conjunto  $H$  es finito  $\mathcal{H}$  admite una representación por un diagrama de Hasse como se muestra en la figura, los conjuntos unitarios (los que tienen sólo un elemento) son sus átomos.

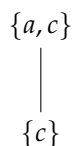
Por ejemplo, si tomamos el conjunto  $A = \{a, b, c\}$  su conjunto de partes es:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

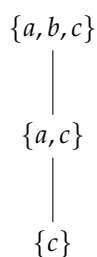
Su diagrama de Hasse se representa como sigue:



Este diagrama ordena los elementos de  $\mathcal{P}(A)$  por inclusión.  
Por ejemplo: como  $\{c\} \subseteq \{a, c\}$  entonces en el diagrama aparece:



Como  $\{c\} \subseteq \{a, c\}$  y  $\{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$  entonces aparece



En este caso, sus átomos son  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

En la figura se representan los conjuntos por niveles de acuerdo con el número de elementos.

Las líneas de abajo hacia arriba indican la inclusión al nivel inmediato siguiente, se omiten las líneas por transitividad.

De arriba hacia abajo indican las intersecciones al nivel inmediato inferior.

**1.4. Ejemplo.** El conjunto  $B = \{0, 1\}$  con las operaciones  $\vee$  y  $\wedge$  dadas por las tablas:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Y la operación complemento definida por

$$0' = 1, \quad 1' = 0$$

es un álgebra de Boole.

El diagrama de Hasse de este álgebra es:



---

**1.5. Proposición.** (Leyes de idempotencia). Sea  $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$  un álgebra de Boole, entonces para cualquier  $x \in B$  se cumple que:

$$x + x = x, \quad xx = x$$

---

**1.6. Proposición.** (Leyes de acotación). Sea  $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$  un álgebra de Boole, entonces para cualquier  $x \in B$ , se cumple que:

$$x + 1 = 1, \quad x0 = 0$$

---

**1.7. Proposición.** (Leyes de absorción.) Sea  $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$  un álgebra de Boole, entonces para cualesquiera  $x, y \in B$ , se cumple que:

$$x + (xy) = x, \quad x(x + y) = x$$

---

**1.8. Proposición.** Sea  $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$  un álgebra de Boole, entonces para cualquier  $x \in B$ , se cumple que:

$$(x')' = x$$

---

**1.9. Proposición.** (Leyes de De Morgan). Sea  $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$  un álgebra de Boole, entonces para  $x, y \in B$  se tiene que:

$$\begin{aligned} (x + y)' &= x'y' \\ (xy)' &= x' + y' \end{aligned}$$

---

**1.10.** Veremos en lo que sigue cómo simplificar expresiones booleanas mediante las proposiciones mencionadas anteriormente.

Las variables booleanas son variables que toman valores 0 o 1.

Las función booleanas son funciones con dominio en  $B^n$  y codominio  $B$ .

Es decir, que las funciones booleanas también toman valor 0 o 1, dependiendo de los valores de sus variables.

Se llama conjunto de verdad de una función booleana  $f : B^n \rightarrow B$  al conjunto de elementos del dominio para los cuales la función vale 1:

$$V(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1\}$$

Así, una función booleana puede representarse mediante una tabla de verdad, por ejemplo,

para una función de dos variables, tenemos:

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	$f(0, 0)$
0	1	$f(0, 1)$
1	0	$f(1, 0)$
1	1	$f(1, 1)$

Esta función puede representarse con una expresión booleana, donde aparecen los valores de las variables del conjunto de verdad de  $f$ ; es decir, los valores para los cuales  $f$  vale 1.

Por ejemplo, si tenemos la función booleana dada por la siguiente tabla:

$x$	$y$	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La función puede represe como  $f(x, y) = x'y + xy$ . Es decir, la función queda definida por su conjunto de verdad.

Esta expresión a su vez puede simplificarse usando los axiomas y propiedades del álgebra de Boole;

$$\begin{aligned}x'y + xy &= (x' + x)y && \text{(por el axioma B5)} \\&= 1y && \text{(por el axioma B7)} \\&= y && \text{(por el axioma B6)}\end{aligned}$$

**1.11. Ejemplo.** Una fábrica de refrescos desea que un sistema automático saque de la cinta transportadora un refresco que no cumple con los requisitos mínimos de calidad, y para esto se cuenta con cuatro sensores en diferentes puntos del sistema de transportación para revisar aspectos importantes de calidad. Si los sensores son  $A, B, C$  y  $D$  y el sistema  $F$  es el que determina cuando sacará el refresco, tenemos el siguiente grupo de señales:

$A$	$B$	$C$	$D$	$F$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

En la tabla anterior se muestran todas las posibles combinaciones de valores 0 o 1, de las variables.

La tabla indica que cuando  $F = 1$  el refresco debe ser retirado. Esto implica que el refresco será extraído de la banda de transportación en cualquiera de los siguientes casos, ya que para cualquiera de ellos se tiene que  $F = 1$  :

$A = 0, B = 0, C = 0$  y  $D = 1$ ; es decir, cuando  $A' = 1, B' = 1, C' = 1$  y  $D = 1$ .

$A = 0, B = 0, C = 1$  y  $D = 1$ ; es decir, cuando  $A' = 1, B' = 1, C = 1$  y  $D = 1$ .

$A = 1, B = 0, C = 0$  y  $D = 1$ ; es decir, cuando  $A = 1, B' = 1, C' = 1$  y  $D = 1$ .

$A = 1, B = 0, C = 1$  y  $D = 1$ ; es decir, cuando  $A = 1, B' = 1, C = 1$  y  $D = 1$ .

$A = 1, B = 0, C = 1$  y  $D = 0$ ; es decir, cuando  $A = 1, B' = 1, C = 1$  y  $D' = 1$ .

La función booleana que equivale a la tabla anterior es:

$$F = A'B'C'D + A'B'CD + AB'C'D + AB'CD + AB'CD'$$

La función booleana indica solamente los casos en donde el refresco será extraído, pero existen varios casos más en donde se dejará pasar porque cumple con los requisitos mínimos de calidad.

Observemos que podemos simplificar la expresión booleana para extraer los refrescos usando los axiomas y teoremas del algebra de Boole:

$$\begin{aligned} & A'B'C'D + A'B'CD + AB'C'D + AB'CD + AB'CD' = \\ &= A'B'D(C' + C) + AB'D(C' + C) + AB'CD' && \text{(por axioma B3)} \\ &= A'B'D(1) + AB'D(1) + AB'CD' && \text{(por axioma B7)} \\ &= A'B'D + AB'D + AB'CD' && \text{(por axioma B6)} \\ &= B'D(A' + A) + AB'CD' && \text{(por axioma B3)} \\ &= B'D(1) + AB'CD' && \text{(por axioma B7)} \\ &= B'D + AB'CD' && \text{(por axioma B6)} \end{aligned}$$

De esta forma hemos obtenido una expresión simplificada de la función original. Esto nos dice que:

$$F = A'B'C'D + A'B'CD + AB'C'D + AB'CD + AB'CD' = B'D + AB'CD'$$

Así, podemos decir que el refresco se sacará de la cinta cuando:

$$B = 0 \text{ y } D = 1 \quad \text{o cuando } A = 1, B = 0, C = 1 \text{ y } D = 0$$

En este curso entenderemos como expresión simplificada, aquella que esté expresada como suma de productos (los productos entre variables o sus complementos) y que éstos sean el mínimo número posible.

Así, la expresión:  $XYZ + X'YZ + WZ$  es una suma de productos pero no está simplificada. Entonces:

$$XYZ + X'YZ + WZ = (X + X')YZ + WZ = 1YZ + WZ = YZ + WZ$$

está simplificada.

Observemos que podríamos escribir  $YZ + WZ = (Y + W)Z$  pero en este caso no es una suma de productos.



**1.12. Ejercicios**

1. Sean  $A, B$  y  $C$  elementos de un Álgebra de Boole  $B = (F, +, \cdot, ', 0, 1)$ . Indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, señalando los axiomas usados.
  - a)  $A + (AC) = (A + A)(A + C)$
  - b)  $AB + 0 = AB$
  - c)  $CB1 = CB$
  - d)  $(AB)' + AB = 0$
  - e)  $CA(CA)' + B = B$
  - f)  $CA + 0 = 0$
  - g)  $(AB)' + AB + CC' = 1$
2. Sea  $H = \{a, b, c, d, e\}$  y sea  $B = (\mathcal{P}(H), \cup, \cap, ', \emptyset, H)$  el álgebra de Boole de partes de  $H$ . Los siguientes conjuntos son elementos de  $\mathcal{P}(H)$ :  
 $\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}$   
Representar la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.
3. Sea  $B = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ , con la suma y producto usual de enteros. Si para cada  $a \in \mathbb{Z}$ , se define  $a' = -a$ , es  $B$  un álgebra booleana?
4. Sea  $B = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$  con la suma y el producto usual de enteros. Si para cada  $a \in \mathbb{Z}$ , se define  $a' = -a$ , ¿es  $B$  un álgebra booleana?
5. Demostrar que si 0 y 1 son el primer y último elemento de un álgebra de Boole, entonces  $1' = 0$  y  $0' = 1$ .
6. Probar la Ley de De Morgan:  $(xy)' = x' + y'$
7. Si  $x, y, z, w$  son variables de un álgebra de Boole, simplificar las siguientes expresiones, indicando las propiedades usadas.
  - a)  $x + xy + x(x + y) =$
  - b)  $x' + [(xx')'] =$
  - c)  $x(y + x')' =$
  - d)  $[x(y'y)] + [y(x + x')] =$
  - e)  $y'xy + y'x + ywx' + yww =$
  - f)  $[(x + y)' + z'] [z' + (x + (yz)')'] =$
8. Si  $x, y, z$  son variables de un álgebra de Boole, demostrar que:
  - a)  $x'y'z + x'yz + xy'z + xyz + xyz' = z + xy$
  - b)  $x + (y + 0)' + y'z = x + y'$
  - c)  $x + y' + (xy + 0)' = 1$
  - d)  $x + (y + 1)' + xy = x$
  - e)  $((zx)'zx)' + xy + xy' = 1$

f)  $x((y' + x)' + (y' + y)') = 0$

9. a) Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:

A	B	C	$F(A, B, C)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- b) Simplificar la expresión hallada.

10. a) Definir la expresión booleana que representa la siguiente función.

A	B	C	D	$F(A, B, C, D)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

- b) Simplificar la expresión hallada.



## Bibliografía utilizada

Precálculo- Stewart James Editorial Cengage Learning Editores S.A. de C.V.; 6a edición (2012)