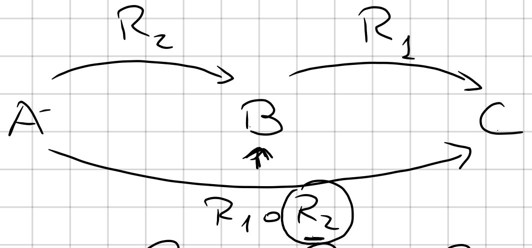
Clase 2/5

Relaciones



$B \times C$ $\quad A \times B$

R_1, R_2 relaciones $\quad R_3 = R_1 \circ R_2$

$$R_3 = \{ (x,z) \in A \times C : \text{existe } b \in B \text{ tal que } (x,b) \in R_2 \text{ y } (b,z) \in R_1 \}$$

↑ Definición

Ejemplo 7.b)

$R_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x^2 + 1 \}$ ←

$R_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = 3x+2 \}$

$\{ (\alpha,\beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \beta = 3\alpha + 2 \}$

$$R_1 \circ R_2 = \{ (a,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists\, b \in \mathbb{N} \text{ tal que } (a,b) \in R_2 \text{ y } (b,c) \in R_1 \}$$

1) $(a,b) \in R_2 \Rightarrow \boxed{b = 3 \cdot a + 2}$

2) $(b,c) \in R_1 \Rightarrow \boxed{c = b^2 + 1} \longrightarrow c = (3a+2)^2 + 1$

$$R_1 \circ R_2 = \{ (a,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : c = (3a+2)^2 + 1 \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = (3x+2)^2 + 1 \}$$

$$R_2 \circ R_1 = \{ (a,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists\, b \in \mathbb{N} \text{ tal que } (a,b) \in R_1 \text{ y } (b,c) \in R_2 \}$$

1) $(a,b) \in R_1 \Rightarrow$ $\boxed{b = a^2 + 1}$

2) $(b,c) \in R_2 \Rightarrow$ $\boxed{c = 3b + 2} \rightarrow c = 3 \cdot (a^2 + 1) + 2$

$$\boxed{R_2 \circ R_1 = \{ (a,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : c = 3(a^2+1) + 2 \}}$$

7.d) $R_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x < 6, \quad y = 2x + 1 \}$

$R_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x > 10, \quad y = x - 1 \} \leftarrow$

$$R_1 \circ \underline{R_2} = \{ (a,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists\, b \in \mathbb{N} \text{ tal que: } \underline{(a,b)} \in R_2 \quad (b,c) \in R_1 \}$$

1) $(a,b) \in R_2 \Rightarrow$ $\boxed{b = a - 1}$ y $a > 10$

2) $(b,c) \in R_1 \Rightarrow$ $\boxed{c = 2 \cdot b + 1}$ y $b < 6$

$\Downarrow$

$c = 2 \cdot (a - 1) + 1$

$c = 2a - 2 + 1$

$c = 2a - 1$

$b = a - 1$

Como $b < 6$

$\Downarrow$

$a - 1 < 6$

$\boxed{a < 7}$

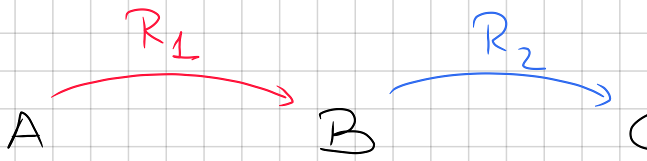
Pero $\boxed{a > 10}$

Abs!

Por lo tanto, $R_1 \circ R_2 = \emptyset$

$R_2 \circ R_1 = \{ (a,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists\, b \in \mathbb{N}$ tal que $(a,b) \in R_1$ $(b,c) \in R_2 \}$

$R_2 \circ R_1$:



1) $(a,b) \in R_1 \Rightarrow$ $a < 6$ y $b = 2a + 1$

2) $(b,c) \in R_2 \Rightarrow$ $b > 10$ y $c = b - 1$

$\Downarrow$

$b > 10$

$2a + 1 > 10$

$2a > 9$

$a > 9/2 = 4{,}5$

$a \geq 5$

Además, $a < 6$

$\Downarrow$

$c = (2a+1) - 1$

$\boxed{c = 2a}$ ←

$\underbrace{a \geq 5 \quad y \quad a < 6}$

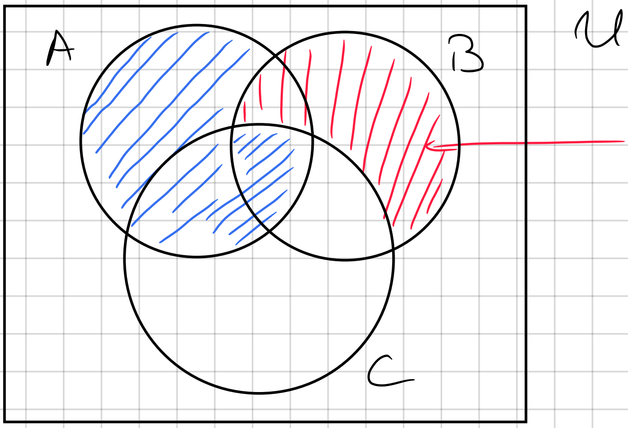
$\Rightarrow \boxed{a = 5}$ ←

Por lo tanto, $R_2 \circ R_1 = \{ (5, 10) \}$

$= \{ (a,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a = 5,\ c = 2a \}$

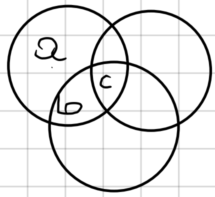
Operaciones entre conjuntos

$A - (B - C)$

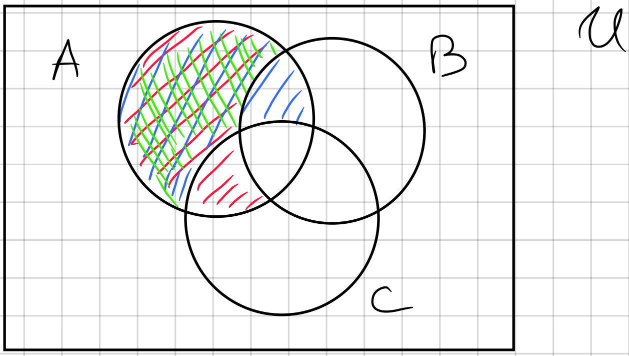


$B - C$

$A - (B - C)$



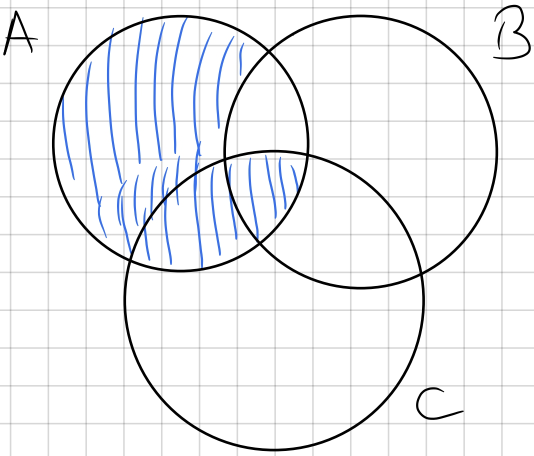
a) $(A - B) \cap (A - C)$



$(A - B) \cap (A - C)$

$A - B$

$A - C$



$B - C$

Quiero

$A - (B - C)$

$A \times (B - C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Algebra de Boole

7) e) $y'xy + y'x + ywx' + yww =$

$y'x(y+1) + ywx' + yw =$

$y'x(y+1) + yw(x'+1)$

$y'x \cdot 1 + yw \cdot 1$

$$\boxed{y'x + yw}$$

Lógica

a) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

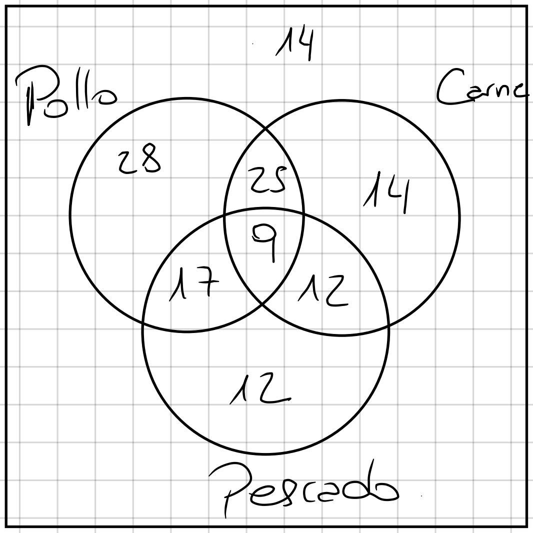
A	B	C	$B \Delta C$	$A \cap (B \Delta C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \Delta (A \cap C)$
V	V	V	F	F	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

A	A'
V	F
F	V

$A \cap B$	$(A \cap B)'$
V	F
F	V
V	F
V	F

Problemas de conteo

$\mathcal{U} = 131$



Ej

$131 = |\mathcal{U}|$

$|Pollo| = 79$ ✓

$|Solamente\ Pollo| = 28$ ✓

$|Carne| = 60$

$|Carne\ y\ Pescado| = 21$ ✓

$|Pescado| = 50$ ✓

$|Solo\ Pescado| = 12$ ✓

$|Pollo,\ Carne\ y\ Pescado| = 9$ ✓

$a + b = 21$

$|Pescado| = 50$

$9 + 12 + 12 + x = 50$

$x = 50 - 33$

$|Pollo| = 79$

$28 + 17 + 9 + x = 79$

$x = 79 - 28 - 17 - 9$

$|carne| = 60$

$25 + 9 + 12 + x = 60$

$x = 14$

2) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -1 \leq x \leq 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow |A| = 7$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 2 \leq x \leq 4\} = \{2, 3, 4\} \Rightarrow |B| = 3$

a) $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 7 \cdot 3 = 21$

$A \times B = \{(-1,2), (-1,3), (-1,4), \ldots, (5,2), (5,3), (5,4)\}$

b) $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \,/\, x < y\} \Longrightarrow Dom(R_1) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

$= \{(-1,2), (-1,3), (-1,4), (0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

c) $R_2 = \{ (x,y) \in A \times B \ / \ x + y = 3 \}$

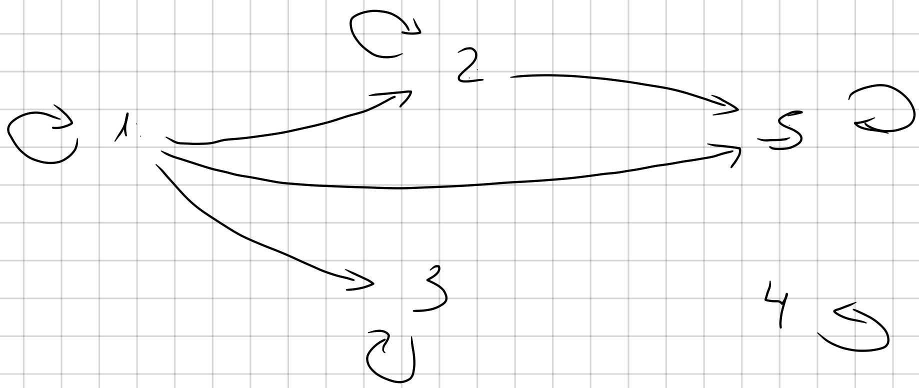
$= \{ (-1, 4), (0, 3), (1, 2) \}$ ~~$(2, 1)$~~ ~~$(3, 0)$~~ (A, B)

$Dom(R_2) = \{ -1, 0, 1 \}$

Relaciones

11) c) $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$R = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3) (2,5) (1,5) \}$



Reflexiva. Si para todo $x \in A$, se tiene que $x R x \iff (x,x) \in R$

$(x,x) \in R$ para todo $x \in A$
$\Rightarrow R$ es reflexiva

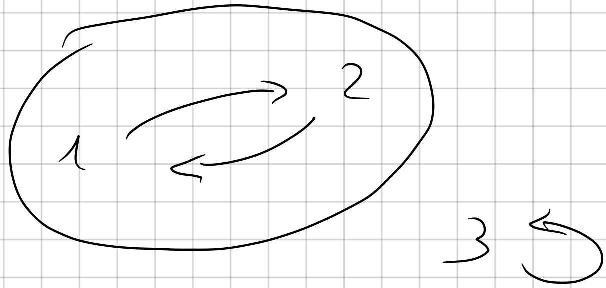
Simétrica. Si $a R b$ entonces $b R a$
$\iff (a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$.

No es simétrica. Por ejemplo, $(1,2) \in R$ pero $(2,1) \notin R$

Antisimétrica: 1) Si aRb y bRa entonces $a=b$

2) Si $a\neq b$ y aRb entonces $b \not R a$

Es antisimétrica: cada vez que aRb, con $a \neq b$, se tiene $b \not R a$



No es antisimétrica
Es simétrica

Transitividad: Si aRb y bRc entonces aRc
$\Leftrightarrow$ Si $(a,b)\in R$ y $(b,c)\in R$ entonces $(a,c)\in R$

El único caso a verificar:

$1 R 2$ y $2 R S$, Además $1 R S$ ✓

Es transitiva

- Equivalencia si es reflexiva ✓, simétrica NO y transitiva
  $\Rightarrow$ No es de equivalencia

- De orden: si es reflexiva ✓, antisimétrica ✓ y transitiva ✓
  $\Rightarrow$ Es de orden